

Devoir de Synthèse d'Algèbre N°1

Section: PT1

Durée: 2h

Date: Décembre 2025

Nbre de pages: 2

Exercice 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Vérifier qu'on peut écrire $M = 3I_3 + N$ où N est une matrice à déterminer.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^p pour $p \geq 3$.
3. En déduire M^p pour tout entier $p \geq 1$.
4. **Application :** Soient $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ trois suites réelles telles que $x_0 = 1, y_0 = 2$ et $z_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$$

On considère $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que $X_n = M^n X_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) En déduire les expressions de x_n, y_n, z_n en fonction de n .

Exercice 2

Soient E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow E$ une application.

1. On considère la relation binaire $\mathfrak{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$A \mathfrak{R} B \iff f(A) = f(B)$$

- (a) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
- (b) Montrer que : f est injective $\iff \mathcal{CL}_{\mathfrak{R}}(E) = \{E\}$.

2. On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier naturel ≥ 2 . Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice conjuguée de M c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M . En notant $M = (m_{kj})_{1 \leq k, j \leq n}$, alors $\overline{M} = (\overline{m}_{kj})_{1 \leq k, j \leq n}$.

On admet que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.

Par exemple, pour $\theta \in \mathbb{R}$, si $M = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 2+i & e^{i\theta} \end{pmatrix}$, alors $\overline{M} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 2-i & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\overline{M}$, lorsque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\overline{\overline{M}} = M$.
3. (a) Montrer que, pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et pour tout complexe $\alpha \in \mathbb{C}$,
$$\overline{\alpha M + N} = \overline{\alpha} \overline{M} + \overline{N}.$$
(b) Montrer que, pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\overline{MN} = \overline{M} \overline{N}$.
(c) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ${}^t \overline{M} = \overline{{}^t M}$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(a) Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\overline{M^k} = \overline{M}^k$.
(b) En déduire que si M est nilpotente, alors $\overline{M}$ l'est aussi.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **inversible**.
(a) Montrer $\overline{M}$ est aussi inversible et que $\overline{M^{-1}} = \overline{M}^{-1}$.
(b) Vérifier que $\det(\overline{M}^{-1}) = \frac{1}{\det(\overline{M})}$.
6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA$ soit inversible et $A^2 + B^2 = AB$.
On pose $M = A + jB$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
(a) Vérifier que $j^2 = \overline{j}$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
(b) Vérifier que $M\overline{M} = j(BA - AB)$.
(c) Montrer que $\det(M\overline{M}) = |\det(M)|^2$.
(d) Montrer que $\det(M\overline{M}) = j^n \det(BA - AB)$.
(e) En déduire que n est un multiple de 3.