

Sciences et Techniques Automatisées (STA)

Mécanique des Solides Indéformables PT1

Examen de fin du 1^{er} semestre. Date : 16 Décembre 2025. Durée: 1 h 30 min

On se propose d'étudier un système de préhension qui permet de saisir un objet et de le déplacer (Figure 1). Ce système est composé de :

- un bâti fixe (0) au quel est lié le repère $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ supposé galiléen ;
- une colonne (1), à la quelle est lié le repère $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$, en liaison pivot d'axe $(O, \bar{z}_0)$ avec le bâti (0) tel que $\alpha = (\bar{x}_0, \bar{x}_1) = (\bar{y}_0, \bar{y}_1)$;
- un bras (2), auquel est lié le repère $R_2(A, \bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$, en liaison pivot d'axe $(A, \bar{x}_1)$ avec la colonne (1) d'une part et en liaison pivot d'axe $(B, \bar{x}_1)$ avec le bras (3) d'autre part. On note $\theta = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (\bar{z}_0, \bar{z}_2)$;
- un bras (3), de centre d'inertie G_3 , auquel est lié le repère $R_3(B, \bar{x}_1, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ tel que : $\bar{y}_3 = \bar{y}_1$ et $\bar{z}_3 = \bar{z}_0$;
- une barre (4), à laquelle est lié le repère $R_4(D, \bar{x}_1, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$ tel que $\bar{y}_4 = \bar{y}_2$ et $\bar{z}_4 = \bar{z}_2$, en liaison pivot d'axe $(D, \bar{x}_1)$ avec la colonne (1) d'une part et en liaison pivot d'axe $(C, \bar{x}_1)$ avec le bras (3) d'autre part ;
- un vérin qui assure la rotation de (2) par rapport à (1). Il est constitué d'une tige (5) et du corps (6) liés par une liaison pivot glissant (supposée glissière) d'axe $(E, \bar{y}_6)$. Cette tige (5) est aussi en liaison pivot d'axe $(F, \bar{x}_1)$ avec le bras (2). Le corps (6), auquel est lié le repère $R_6(E, \bar{x}_1, \bar{y}_6, \bar{z}_6)$, est en liaison pivot d'axe $(E, \bar{x}_1)$ avec la colonne (1). On note $\beta = (\bar{y}_1, \bar{y}_6) = (\bar{z}_0, \bar{z}_6)$.

Les positions des différents points géométriques sont décrites par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{OA} = a \bar{y}_1 + h \bar{z}_0, \quad \overrightarrow{AE} = -e \bar{z}_0, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \ell_1 \bar{z}_0, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \ell_2 \bar{y}_2, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{\ell_2}{2} \bar{y}_2$$

$$\overrightarrow{BG_3} = -b \bar{z}_3 = -b \bar{z}_0, \quad \overrightarrow{EF} = \lambda \bar{y}_6$$

où a, h, e, ℓ_1, ℓ_2 et b sont des constantes géométriques. α, β, θ et λ sont des paramètres de position du système, dépendants du temps.

Partie I) : Etude cinématique : (16 pts)

1°) Déterminer les vecteurs rotations: $\vec{\Omega}_{1/0}, \vec{\Omega}_{2/1}, \vec{\Omega}_{2/0}, \vec{\Omega}_{6/1}, \vec{\Omega}_{6/0}, \vec{\Omega}_{5/6}, \vec{\Omega}_{5/0}, \vec{\Omega}_{3/1}$.

2°) Calculer par cinématique du solide $\vec{V}(A \in (1)/(0))$.

3°) a) Ecrire au point A le torseur cinématique de $(1)/(0)$, quel est sa nature ?, déduire son axe central.

b) Ecrire au point A le torseur cinématique de $(2)/(0)$, quel est sa nature ?.

4°) a) Déterminer $\vec{V}(F \in (2)/(1))$, $\vec{V}(F \in (1)/(0))$, déduire $\vec{V}(F \in (2)/(0))$.

b) Déterminer $\vec{V}(F \in (5)/(6))$, $\vec{V}(F \in (6)/(1))$.

c) Déduire $\vec{V}(F \in (5)/(1))$, puis l'exprimer dans la base de R_2 .

5°) Justifier que $\vec{V}(F \in (2)/(1)) = \vec{V}(F \in (5)/(1))$, déduire les deux équations (éq 1 : suivant $\bar{x}_2$) et (éq 2 : suivant $\bar{y}_2$) qui relient $\lambda, \dot{\lambda}, \dot{\theta}, \dot{\beta}, \ell_2$ et $(\beta - \theta)$.

6°) a) Déterminer le torseur cinématique du bras (3) dans son mouvement par rapport à la colonne (1) au point B, puis au point G_3 .

b) Quelle est la nature de ce torseur ?, justifier votre réponse.

c) Quelle est la nature du mouvement de (3) par rapport à (1) ?, justifier votre réponse.

7°) a) Calculer, par dérivation l'accélération $\vec{\gamma}(A \in (1)/(0))$.

b) Calculer, par cinématique du solide l'accélération $\vec{\gamma}(B \in (2)/(1))$.

c) Dédurre l'accélération $\vec{\gamma}(G_3 \in (3)/(1))$.

Partie II : Etude géométrique : (4 pts)

8°) Réaliser le graphe de liaisons du système, en déduire la nature de la chaîne.

9°) a) Ecrire l'équation vectorielle qui traduit la fermeture géométrique de la chaîne (1)-(6)-(5)-(2)-(1).

b) Projeter cette équation vectorielle dans la base du repère R_2 et écrire les deux équations scalaires qui en découlent (éq 3 : suivant $\vec{x}_2$) et (éq 4 : suivant $\vec{y}_2$).

10°) a) Dériver par rapport au temps les deux équations obtenues. Ces deux dernières équations seront notées : (éq 3' : suivant $\vec{x}_2$) et (éq 4' : suivant $\vec{y}_2$).

b) A l'aide des deux équations (éq 3) et (éq 4), vérifier que le terme en $\dot{\theta}$ de l'équation (éq 3') s'annule et que le terme en $\dot{\theta}$ de l'équation (éq 4') vaut $-\frac{\ell_2}{2} \dot{\theta}$.

c) En tenant compte des équations (éq 3) et (éq 4) dans les équations (éq 3') et (éq 4'), vérifier que ces deux dernières deviennent identiques aux équations (éq 1) et (éq 2) obtenues dans la question 5).

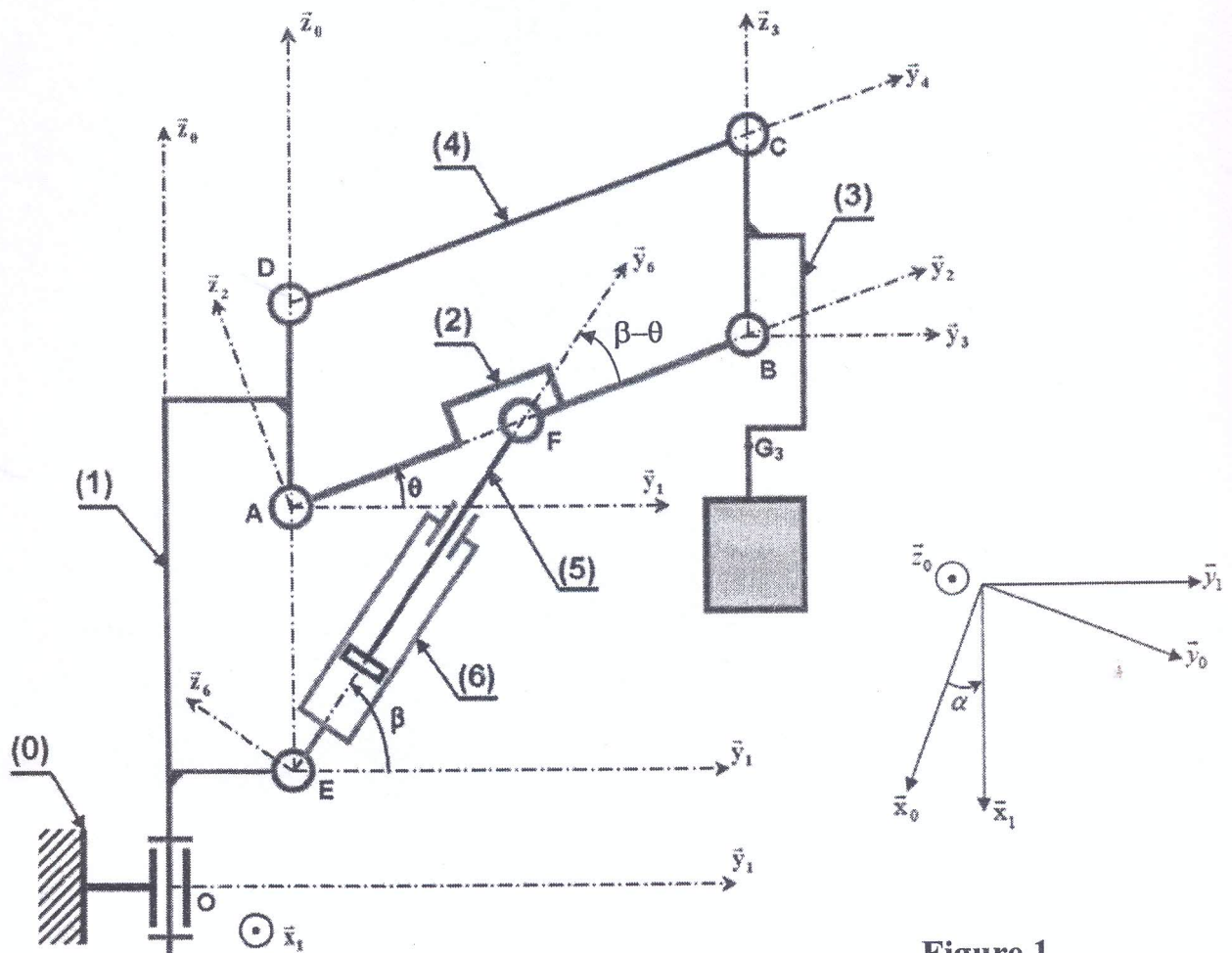


Figure 1