

Durée: 1H30mn

Devoir de contrôle en Mathématiques

Exercice 1

1. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cos^2(n)}$

(b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}$

2. Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries suivantes

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{2n}{(\sqrt{2})^n}$

(b) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 2^n}{n!}$

(c) $\sum_{n \geq 2} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$

Exercice 2

On dispose de 2 dés A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit $\frac{1}{3}$.

- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dé A ;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dé B.

Pour chaque n on note par R_n l'événement : obtenir "rouge" au n -ième coup.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis aux deux premiers coups. Ces deux événements sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 3

Soit P l'application définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$P(\{n\}) = 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que P est une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
2. Calculer $P(\{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\})$.
3. Calculer la probabilité de l'ensemble des multiples de 3.
4. Calculer la probabilité de l'ensemble des nombres n dont le reste est 3 si on le divise par 4.