

Devoir de synthèse N°1

Durée: 2 H

Mathématiques

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème 1

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\Phi(P) = (1 + X)P', \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X].$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Vérifier que la matrice de Φ , dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (a) Déterminer le rang de Φ .
(b) Trouver une base de l'image de Φ .
(c) Trouver une base de noyau de Φ .
4. (a) Ecrire le polynôme caractéristique P_A de la matrice A .
(b) Montrer que les valeurs propres de A sont 0, 1 et 2.
(c) En déduire que la matrice A est diagonalisable.
5. Soient $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = (1 + X)^2$.
(a) Vérifier que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de vecteurs propres de Φ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
(b) Ecrire la matrice D de Φ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
(c) On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Ecrire la matrice P et montrer que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Donner la relation liant les matrices A, D, P et P^{-1} .
6. Calculer D^k et A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Problème 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note I_3 la matrice identité d'ordre 3 et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. (a) Montrer que $\ker(f) = \text{vect}(u)$.
(b) La matrice B est-elle inversible ?
2. (a) Montrer que le vecteur $v = (3, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifie la relation $f(v) = u$.
(b) Montrer que le vecteur $w = (0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifie la relation $f(w) = v$.
(c) Montre que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera par $\mathcal{B}'$.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

3. (a) Ecrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
(b) Calculer N^2 et N^3 .
(c) Donner la relation liant les matrices B, N, P et P^{-1} , puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $B^k = 0$.
4. On note $\mathcal{C}_N$ (respectivement $\mathcal{C}_B$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement B), c'est à dire :

$$\mathcal{C}_N = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / MN = NM\}.$$

- (a) Montrer que $\mathcal{C}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{C}_N = \text{vect}(I_3, N, N^2)$.
On admet que $\mathcal{C}_B$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Etablir que $M \in \mathcal{C}_B \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}_N$.
- (c) En déduire que $\mathcal{C}_B = \text{vect}(I_3, A, A^2)$. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}_B$.