

Devoirs de Synthèse et de Contrôle N°2

Durée: 3 heures

Epreuve: Mathématiques

Date: 30-04-2018

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Les deux devoirs doivent être rédigés sur des copies séparées.

Devoir de Contrôle N°2

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (avec $q = 1 - p$) :

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}, \quad \forall k \geq 1.$$

(a) Montrer que : $P(X > n) = q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$P(X > n + k | X > k) = P(X > n).$$

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique respectivement de paramètre $p_1, p_2 \in]0, 1[$. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$ et $q_i = 1 - p_i \quad \forall i \in \{1, 2\}$.

(a) On désigne par F_1 la fonction de répartition de X_1 . Vérifier que :

$$F_1(k) = 1 - (q_1)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Donner F_Y la fonction de répartition de Y en fonction de celles de X_1 et X_2 .

(c) Montrer que : $P(Y = k) = (q_1 q_2)^{k-1} (1 - q_1 q_2)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

(d) En déduire la loi de Y et donner, sans calcul, $E(Y)$ et $V(Y)$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires indépendantes, $Z_1, \dots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + \dots + Z_n)$.

(a) Montrer que : $E(M_n) = \frac{1}{p}$ et $V(M_n) = \frac{q}{np^2}$.

(b) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(0 \leq M_n - \frac{1}{p} \leq \sqrt{\frac{q}{np^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Exercice 2

1. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $X = -\ln(1 - Y)$.
On note par F_X la fonction de répartition de X .

- (a) Montrer que : $F_X(x) = F_Y(1 - e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
(b) En déduire que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.
(c) Donner, sans calcul, l'espérance de X .

2. On rappelle que : si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_{X_1}, f_{X_2} alors $Z = X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est :

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-t)f_{X_2}(t)dt.$$

Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
(b) Déterminer la loi de S_2 .
(c) Montrer par récurrence sur n que :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}, & \text{si } t \in]0, +\infty[; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de S_n .

3. (a) Rappeler la valeur de : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
(b) A l'aide du théorème de la limite centrée, établir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$.
(c) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!} dt$.

Exercice 3

Dans cet exercice R désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{R^2} & \text{si } t \in [0, R]; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Etudier la continuité de f .
(b) Montrer que f est une densité de probabilité.
Dans toute la suite, on note X une variable aléatoire de densité f et F_X sa fonction de répartition.
2. (a) Déterminer la valeur $F_X(x)$ lorsque $x < 0$, puis lorsque $x > R$.
(b) Montrer que pour tout réel x de $[0, R]$, $F_X(x) = \frac{x^2}{R^2}$.

3. (a) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{2R}{3}$.
 (b) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \frac{R^2}{18}$.
 Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On cherche à estimer le réel R à l'aide de $X_1, X_2, \dots, X_n$.
4. On note S_n la variable aléatoire prenant le maximum des valeurs prises par les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$, de sorte que pour tout réel x ,

$$(S_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x).$$

- (a) Montrer que pour tout réel x , $P(S_n \leq x) = (F_X(x))^n$.
 (b) En déduire la fonction de répartition de S_n .
 (c) Montrer que S_n est une variable à densité et qu'une densité possible est la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(t) = \begin{cases} 2n \frac{t^{2n-1}}{R^{2n}}, & \text{si } t \in [0, R]; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- (d) Montrer que : $E(S_n) = \frac{2n}{2n+1}R$ et $V(S_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}R^2$.
 (e) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = R$.
5. On note $T_n = \frac{3}{2n} \sum_{k=1}^n X_k$.
- (a) Calculer $E(\frac{3}{2}X)$ pour $1 \leq k \leq n$.
 (b) En déduire que T_n est un estimateur sans biais de R .
 (c) Calculer la variance $V(T_n)$ en fonction de R et n .
 (d) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(T_n - 1,96 \frac{R}{\sqrt{8n}} \leq R \leq T_n + 1,96 \frac{R}{\sqrt{8n}}\right) = 0,95$.
 (On donne $\Phi(1,96) = 0,975$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$).
 (e) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(T_n \frac{\sqrt{8n}}{\sqrt{8n}+1,96} \leq R \leq T_n \frac{\sqrt{8n}}{\sqrt{8n}-1,96}\right) = 0,95$.
 (f) Donner un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 du paramètre R .

BON TRAVAIL