

Problème 2 : (Devoir de contrôle)

A- Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la terre de masse m_T à la distance r de son centre. La trajectoire est considérée circulaire.

- 1- Donner l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ et justifier son appellation force centrale conservative.
- 2- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p associé en la choisissant nul pour $r \rightarrow \infty$.
- 3- Calculer la vitesse v_0 du satellite en fonction de la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ et r . Commenter.
- 4- Calculer l'accélération radiale $\vec{\gamma}_r$ du satellite.
- 5- Exprimer l'énergie cinétique E_c du satellite, en fonction de G , m_F , m_T et r .
- 6- Exprimer le rapport $\frac{T_0^2}{r^3}$, où T_0 représente la période de révolution du satellite en fonction de G et m_T .
Quel est le nom de cette loi ?

7- Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \approx R_T$).

Données : $Gm_T = 4,0 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ (masse de la terre m_T) ; rayon de la terre $R_T = 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$.

8- Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique du satellite sous la forme $E_m = -\frac{K}{r}$, en précisant l'expression de K .

B- Caractéristique du sol lunaire

- 9- Exprimer le module du champ gravitationnel lunaire $\|\vec{g}_L\|$ à la surface de la lune, en fonction du module du champ de gravitation au sol $\|\vec{g}_T\|$, de m_T , R_T , m_L et R_L .
- 10- Un bon athlète possède sur la terre une détente verticale de $h_T = 1 \text{ m}$.
 - a- Déterminer l'énergie mécanique de l'athlète sur la terre ($z = 0$).
 - b- Déterminer l'énergie mécanique de l'athlète en ($z = h = 1 \text{ m}$).
 - c- Sachant que l'énergie mécanique est conservative, exprimer le hauteur h en fonction de la vitesse v en $z = 0$ et g .
 - d- En supposant que la vitesse initiale de l'athlète lors du saut (v) est constante, montrer que sa détente sur la lune est : $h_L = h_T \left(\frac{m_T}{m_L} \right) \left(\frac{R_L}{R_T} \right)^2$.

Donnée: $Gm_L = 4,9 \cdot 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ (constante gravitationnelle G , masse de la lune m_L) ; rayon de la lune $R_L = 1,74 \cdot 10^3 \text{ km}$;

11- Le sol lunaire est accidenté et modélisé par une surface ondulée de période spatiale λ , d'équation $z(x) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Un véhicule assimilé à un point matériel M de masse m se déplace sur cette surface

suivant la loi $x_M(t) = vt$, où v est une constante.

Montrer que $z_M(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω . Relier ω , λ et v .

12- En appliquant le principe fondamentale de la dynamique, montrer que la réaction du sol lunaire sur le véhicule s'écrit: $R_z = m(g_L - A \omega^2 \cos(\omega t))$.

13- Montrer que la valeur maximale de A qui assure le maintien du véhicule au sol est : $A_{max} = \frac{G m_L \lambda^2}{4 \pi^2 R_L^2 v^2}$

14- Application numérique: calculer A_{max} pour $v = 14 \text{ km.h}^{-1}$ et $\lambda = 1 \text{ m}$.

C- Rover lunaire

Les astronautes des missions Apollo XV et suivantes ont utilisé pour leurs déplacements un véhicule spécialement adapté : le rover lunaire. Ce véhicule est sommairement modélisé par un parallélépipède de masse m_R , de centre de gravité G , reposant sur une roue de centre O de masse négligeable. Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ reste toujours vertical. Les positions du centre de gravité et du centre de la roue par rapport à la position de repos sont notées respectivement $z(t) = z_G(t)$ et $z_0(t)$. Le véhicule est relié à la roue par une suspension modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , et un amortisseur fluide de constante d'amortissement β .

La force d'amortissement exercée sur la masse m_R est donnée par : $\vec{F}_f = -\beta \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \right) \vec{u}_z$

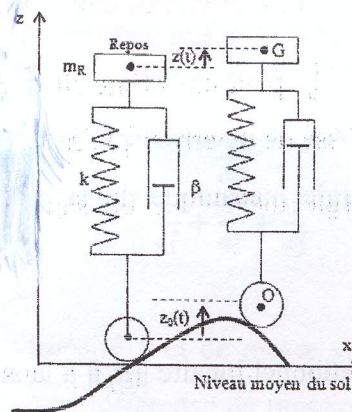


Figure 5

15- Montrer que l'allongement du ressort au repos est : $\Delta \ell = \ell_{eq} - \ell_0 = -\frac{m_R g_L}{k}$.

16- La roue restant en contact avec le sol, $z_0(t) = A \cos(\omega t)$. Au cours du temps, sa longueur du ressort varie selon la loi suivante: $\ell(t) = \ell_{eq} - z_0(t) + z(t)$.

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique à la masse m_R , montrer que $z(t)$ vérifie l'équation différentielle : $\ddot{z} + \omega_1 \dot{z} + \omega_0^2 z = f(t)$ avec: $\omega_0^2 = \frac{k}{m_R}$, $\omega_1 = \frac{\beta}{m_R}$ et la fonction $f(t) = \omega_1 \dot{z}_0 + \omega_0^2 z_0$.

17- Montrer que l'amplitude complexe du mouvement du point G est donnée en régime sinusoïdal forcé par :

$$\bar{H} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}_0} = \frac{1 + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_0^2}}{1 + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

18- Montrer que pour un raideur k suffisamment faible, $\bar{H}$ se réduit à la fonction de transfert : $\bar{H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}$