

Devoir de contrôle de Mathématiques

Exercice 1 :

On désigne par $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est donnée par

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $D = \text{diag}(1, 1, 0)$.

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
2. On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}$.

Déterminer une base et la dimension de F .

3. (a) Calculer M^2 .
(b) Montrer que f est la projection orthogonale sur F .
4. (a) On pose $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in F$.

Déterminer un vecteur (a, b, c) de F orthogonal à u_1 .

- (b) Construire alors un vecteur u_2 tel que (u_1, u_2) soit une base orthonormée de F .
5. Montrer que $F^\perp = \text{Vect}(w)$, où $w = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
6. Montrer que (u_1, u_2, w) est une base orthonormée de vecteurs propres de M .
7. Trouver une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = PD^tP$.

Exercice 2 :

Dans une suite d'épreuves de Pile ou Face **indépendantes**, on considère la variable aléatoire Z égale au **rang de la première apparition** de Pile suivi d'une suite de Face **ou** de Face suivi d'une suite de Pile.

On pose $p \in]0, 1[$ la probabilité d'obtenir Pile et $q = 1 - p$ la probabilité d'obtenir Face.

Exemples :

$PFFPFP..... : Z = 2.$

$PPFFFP..... : Z = 4.$

$FFFFPPFF.... : Z = 5.$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z .
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p et Y une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre q .
 - (a) Rappeler les lois de X et Y .
 - (b) Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
 - (c) Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - 1$.
 - (d) Montrer que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 1$.
 - (e) En déduire $\mathbb{V}(Z)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.