

Devoir de synthèse de Mathématiques

EXERCICE

Soit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

1. (a) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(u)$.
 (b) Déterminer le noyau et l'image de f .
 (c) f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? justifier la réponse.
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de J .
 (b) Dédurre les valeurs propres de J ainsi que leurs ordres de multiplicités.
 (c) J est-elle diagonalisable? justifier la réponse.
 (d) Déterminer les vecteurs propres de J .
 (e) Montrer que $J = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et P une matrice inversible à déterminer ainsi que son inverse P^{-1} .

3. Pour tout réel a , on considère la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a+1 & 4 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

- (a) Exprimer M_a en fonction de J .
- (b) Dédurre de la question 2.(e) qu'il existe une matrice diagonale $D_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$M_a = PD_aP^{-1}.$$

- (c) Pour quelles valeurs de a , M_a est inversible?

4. Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ trois suites réelles vérifiant $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 4z_n \\ z_{n+1} = y_n + 3z_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on pose $T_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

- Écrire T_{n+1} en fonction de T_n et M_2 .
- En déduire l'expression de T_n en fonction de n .
- Déterminer les limites des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) .

Problème

Partie A : Calcul de la dérivée d'une fonction Ψ .

- Justifier, pour tout réel t , l'existence de l'intégrale

$$\Psi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(xt)}{x^2 + 1} dx.$$

- Montrer que la fonction Ψ ainsi définie est impaire.
- Calculer $\Psi(0)$ et $\Psi(1)$.
- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \frac{\arctg(xt)}{x^2 + 1}.$$

- Déterminer la dérivée partielle $h'(t)$.
- Pour t un réel strictement positif, justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} h'(t) dx.$$

- On admet que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Psi'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(t^2 x^2 + 1)} dx.$$

- Calculer $\Psi'(1)$.
- On suppose que $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(t^2 x^2 + 1)} = \frac{-1}{t^2 - 1} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{t^2}{t^2 - 1} \cdot \frac{x}{t^2 x^2 + 1}.$$

- En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\Psi'(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}$.
- Montrer que Ψ' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B : Fonction de répartition & limite de Ψ en $+\infty$.

Dans la suite, on considère deux variables aléatoires réelles X et Y , indépendantes de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

On définit la variable aléatoire réelle Θ de la manière suivante :

- Si X prend la valeur 0, Θ prend aussi la valeur 0.
- Sinon, $\Theta = \frac{Y}{X}$.

- Donner une densité du couple (X, Y) .
- Donner la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$. Justifier la réponse.
 - On considère le système complet d'événements suivant : $\{(X > 0), (X < 0), (X = 0)\}$.
En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\Theta < t) = \mathbb{P}(Y < tX, X > 0) + \mathbb{P}(Y > tX, X < 0).$$

- Montrer alors que la fonction de répartition F_Θ de Θ est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_\Theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \Psi(t).$$

- En utilisant les propriétés d'une fonction de répartition d'une variable à densité,
 - montrer que Ψ est croissante,
 - calculer la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi(t)$.

Partie C : Calcul d'une somme.

On considère les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt.$$

- Montrer que les intégrales J et K sont convergentes.
 - En utilisant la fonction Ψ , montrer que $J + K = \frac{\pi^2}{4}$.
 - À l'aide du changement de variable $s = \frac{1}{t}$, démontrer que $J = K$.
- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_k = \int_0^1 t^k \ln t dt$ converge.
 - Calculer J_k .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln t}{t^2 - 1} dt.$$

- Calculer la limite de $\frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$ lorsque t tend vers 0, puis lorsque t tend vers 1.
 - En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, telle que, $\forall t \in]0, 1[$, $\left| \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1} \right| \leq C$.
 - En déduire que $\left| \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln t}{t^2 - 1} dt \right| \leq \frac{C}{2n+1}$.
 - Montrer la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt.$$

- Donner alors la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.