

Devoir de contrôle de Mathématiques N°1

Section : BG 2

Durée : 1h

Date : Janvier 2021

Nbre de pages : 2

Exercice 1 : (5 pts)

Donner la nature des séries suivantes :

(i) $\sum \frac{n}{n^3 + 1}$.

(ii) $\sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

(iii) $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(iv) $\sum \frac{1}{n!}$.

(v) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{-2}{5}\right)^n \right)$.

Exercice 2 : (12 pts)

1. Préciser la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.2. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.3. Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

4. En déduire que :

(i) $\forall k \geq 1, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

(ii) $\forall k \geq 2, \ln(k) - \ln(k-1) \geq \frac{1}{k}$.

5. Pour tout $n \geq 1$, on pose $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $a_n = U_n - \ln(n+1)$ et $b_n = U_n - \ln(n)$.(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On note γ la limite commune.(b) Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} (b_{n+1} - b_n)$ converge et donner sa somme en fonction de γ .6. (a) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(b) On pose, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

Trouver une relation entre les suites (v_n) et $(b_{n+1} - b_n)$.

(c) En déduire que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ converge.

(d) Etablir que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma$.

Exercice 3 : (3 pts)

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte par une maladie. On dispose d'un test de dépistage de la maladie :

- ◇ si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%,
- ◇ si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité qu'un test soit positif?
2. Le test est positif. Quelle est la probabilité que la personne soit malade?
3. Le test est négatif. Quelle est la probabilité que la personne soit malade?