

Devoir de Synthèse de Mathématiques N°1

Section : BG 2

Durée : 1h30

Date : Janvier 2021

Nbre de pages : 2

Exercice :

Stéphane possède, à plusieurs mois, un téléphone mobile pour lequel il a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations.

Il a constaté que :

- ◊ si à un mois donné il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est égale à $\frac{1}{5}$.
- ◊ si à un mois donné il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est égale à $\frac{2}{5}$.

On suppose que la probabilité qu'il ait dépassé son forfait le **premier mois** est égale à $\frac{1}{2}$. Dans la suite, on considère l'événement

$\mathcal{A}_n$: " Stéphane dépasse son forfait le $n^{\text{ème}}$ mois".

On note, pour $n \geq 1$, $p_n = P(\mathcal{A}_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}(1 - p_n)$.
2. Exprimer p_n en fonction de n .
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Problème :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner f .
2. La matrice A est-elle symétrique ? est-elle antisymétrique ? Justifier.
3. On pose $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.

Montrer que $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)^2$.

4. En déduire que A est inversible. Quel est alors le rang de f ?
5. Montrer que $(3I_3 - A)A = 2I_3$ et déduire A^{-1} .
6. Donner les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités.
7. On pose $E_1(A) = \ker(A - I_3)$ et $E_2(A) = \ker(A - 2I_3)$.

Donner une base et la dimension de chacun des deux espaces précédents.

8. Déduire que A est diagonalisable.
9. On pose $u = (1, 1, -1)$, $v = (3, 2, 0)$ et $w = (1, 0, 1)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
10. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Calculer D^n , pour tout $n \geq 1$.

$$12. \text{ On pose } Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que Q est inversible et donner son inverse.

13. Etablir une relation entre A , Q et D .
14. Vérifier que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.
15. Calculer alors A^n , pour $n \geq 1$.
16. Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) trois suites réelles vérifiant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 5y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 3y_n \end{cases},$$

avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$.

$$\text{On pose, pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

17. Déduire (x_n) , (y_n) et (z_n) en fonction de n .