

Problème 2 : (DEVOIR DE SYNTHESE)

De nombreuses substances en solution, des protéines par exemple, se chargent électriquement soit par ionisation directe, soit par fixation d'ions présents dans la solution. La technique consistant à séparer les espèces chargées dissoutes dans un liquide électriquement conducteur, en fonction des leurs vitesses de migration dans un champ électrique, est appelé **électrophorèse**.

Une procédure possible consiste à déposer le mélange de substances à séparer dans une zone étroite d'une colonne de solution électrolytique aux extrémités de la quelle est appliquée une différence de potentiels continue (Figure 2). Les substances à séparer, chargées électriquement, sont mis en mouvement sous l'action du champ électrique avec des vitesses de migration différentes. Au cours d'une expérience d'électrophorèse, la zone étroite initiale se sépare au cours du temps en plusieurs zones contenant chacune des espèces moléculaires pures.

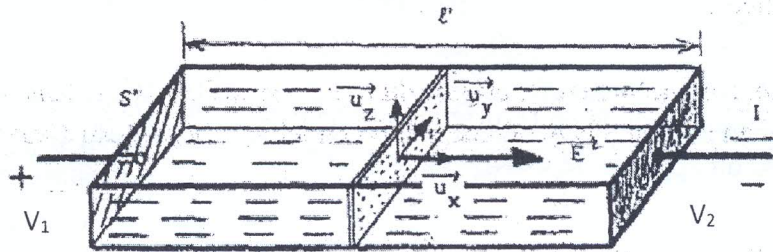


Figure 2

Les éventuels mouvements de convection de l'électrolyte constituent un phénomène parasite qu'il convient de le négliger. On stabilise donc le liquide de point de vue mécanique en l'incluant dans une structure poreuse telle que du papier par exemple.

Partie I : Modélisation de la colonne poreuse

On réalise une colonne poreuse de section $S' = 3 \text{ cm}^2$ et de longueur $l' = 30 \text{ cm}$ constituée de fibres de cellulose dont la masse volumique vaut $\rho = 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La masse de la colonne poreuse est $M = 53 \text{ g}$. L'espace libre entre les fibres est ensuite imprégné d'un électrolyte de conductivité $\gamma = 1,51 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ qui le remplit complètement. Une différence de potentiel $V_1 - V_2 = 120 \text{ V}$ est appliquée aux extrémités de la colonne. On constate qu'elle est alors parcourue par un courant d'intensité $I = 100 \text{ mA}$.

- 1- Rappeler l'expression de la loi d'ohm locale.
- 2- On appelle x la direction selon laquelle la différence de potentiels est appliquée. En considérant que le potentiel électrique ne dépend que de x et que le régime permanent de conduction électrique est atteint, déterminer l'expression de la résistance électrique de la portion du système entre les électrodes séparées d'une distance l' et de section droite S' .

On considérera dans un premier temps le milieu comme homogène de longueur l' et de section S' .

- 3- Calculer numériquement la conductivité effective γ' du milieu (électrolyte + papier).
- 4- On explique la différence observée entre γ et γ' par un double effet :
 - La présence de fibres diminue la section réelle de la colonne d'électrolyte pur, qui n'est en fait que $S < S'$.
 - L'orientation aléatoire des fibres augmente légèrement, pour les ions de l'électrolyte, la distance à parcourir entre les deux électrodes. Cette distance moyenne est alors $l > l'$.

Montrer que le volume Sl effectivement occupé par l'électrolyte s'écrit : $Sl = S'l' - \frac{M}{\rho}$

- 5- En déduire S et l en fonction de S' , l' , ρ , M , γ et γ' .
- 6- Calculer numériquement S et l .

Partie II : Etude du mouvement d'un ion

Le milieu conducteur étant ainsi modélisé comme une colonne d'électrolyte de conductivité γ , de longueur l et de section S , les ions à séparer sont ajoutés dans une zone centrale très étroite, d'épaisseur Δl considérée comme négligeable devant les autres distances (Figure 2). On admettra que la présence des ions à séparer ne modifie pas sensiblement la conductivité de l'électrolyte. La différence de potentiel aux extrémités de la colonne étant maintenue à la valeur $V_1 - V_2 = 120 \text{ V}$, il apparaît un champ électrique $\vec{E} = E \vec{u}_x = \frac{V_1 - V_2}{l} \vec{u}_x$.

Un ion de charge q est alors soumis à une force électrostatique $\vec{F} = q \vec{E}$.

Sous l'effet de cette force, l'ion est mis en mouvement. Il est accompagné d'un cortège de molécules d'eau qui lui sont liées par des forces électrostatiques. La masse totale de l'ensemble en mouvement est m . Le mouvement de cet ensemble est freiné par le milieu environnant qui exerce sur lui une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'ion et α un coefficient positif qui dépend de l'encombrement de l'ion et de son cortège de molécules liées.

A la date $t_0 = 0$, l'ion est supposé immobile en O , origine du repère cartésien $Oxyz$ dans le référentiel lié à la colonne. A cet instant précis, on applique la différence de potentiel $V_1 - V_2 = 120 \text{ V}$ aux extrémités de la colonne.

- 7- Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $\vec{v}$ en fonction de m , q , E et α . On néglige tout effet de pesanteur.
- 8- Déterminer l'expression de la norme de la vitesse $v(t)$ en fonction du temps.
- 9- Exprimer en fonction de m , q , E et α le temps t_1 au bout duquel une vitesse limite $V = \text{constante}$ est atteint à 5% près ($v(t_1) = 0,95 V$).