

Devoir de Synthèse de Mathématiques

Exercice :

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$. On désigne par $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. On pose, pour tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(v) = v - \langle v, a \rangle a.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Calculer $f(x, y, z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. (a) Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}(a)$.
(b) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ s'écrit sous la forme

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormée.
(b) Montrer que $A^2 = A$.
(c) Sans calculer le polynôme caractéristique P_A de A , déterminer les valeurs propres de A .
6. Vérifier que $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont orthogonaux. Donner une représentation cartésienne de $\text{Im}(f)$.
7. On pose $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$.
Montrer que (u, v, a) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de f .
8. Dédire P une matrice inversible telle que

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Montrer que f est la projection orthogonale sur $\text{Im}(f)$.
10. Soit $b = (1, 1, 0)$. Calculer $d(b, \text{Im}(f))$.

Problème :

Partie I :

Soit Y une variable aléatoire dont une densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de répartition de Y .
2. On pose $Y = |X|$.
 - (a) Donner la fonction de répartition de X .
 - (b) Montrer que X suit la loi uniforme sur $(0, 1]$.
 - (c) Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Montrer que, pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{2a} \text{ et } \mathbb{P}(|X - \frac{1}{2}| \geq a) \leq \frac{1}{12a^2}.$$

4. Pour tout réel t , on définit $G_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

Montrer que

$$G_X(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t}, & \text{si } t \neq 0 \\ 1, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

5. On pose $U = \min(X, 1 - X)$ et $V = \max(X, 1 - X)$.
Déterminer une densité f_U de U et une densité f_V de V .

Partie II :

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{1 \leq n \leq 10}$ indépendantes et de même loi uniforme sur $(0, 1]$. On pose $H = X_1 + \dots + X_{10}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ et déduire $\phi(0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(H)$ et $\mathbb{V}(H)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(H \geq 6) \leq \frac{5}{6}$.
4. En utilisant le Théorème Central Limite, montrer que $\mathbb{P}(H \geq 6) = 1 - \phi(\sqrt{\frac{6}{5}})$.
5. On donne $\phi(\sqrt{\frac{6}{5}}) = 0.84$.
Donner le pourcentage pour que la somme H dépasse 6.

Partie III :

Soit Z la variable aléatoire de densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}.$$

1. Reconnaître la loi de Z et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer la fonction de répartition de Z en fonction de ϕ (la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).
3. Montrer que $\mathbb{P}(1 \leq Z < 2) = \phi(1) - \frac{1}{2}$.