

Devoir de contrôle de Mathématiques N°2

Section : BG 2

Exercice 1 :

Soit $p \in]0, 1[$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P(X = n, Y = k) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k, & \text{si } k \geq n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que $\lambda = p^2$.
2. (a) Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X et Y .
(b) Quelle est la loi de $X + 1$?
(c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Montrer que X et $Y - X$ suivent la même loi.
4. (a) Montrer que X et $Y - X$ sont indépendantes.
(b) En déduire $\text{cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 :

On donne $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire deux boules successivement et sans remise de cette urne.

Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Montrer que la loi du couple (X, Y) est défini par

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n(n-1)}, & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

2. (a) Montrer que X et Y suivent la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.
(b) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
(c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
(d) Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$.
(e) Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et $\mathbb{V}(X + Y)$.