

Devoir surveillé de Physique
(2^{ème} Année de Préparation Biologie - Géologie)
Jeudi 01 Avril 2021 de 8h30 à 10h30

Problème 1 : Filtre dans un appareil à résonance magnétique nucléaire (RMN)

Dans un appareil à RMN, il y a une bobine qui permet d'enregistrer les signaux émis lors de la relaxation des différents protons après excitation. La bobine de détection du champ magnétique créé par les protons, d'inductance L et de résistance interne r , fait partie d'un circuit de filtrage des signaux, modélisé ici par une association de type « RLC série » (Figure 1).

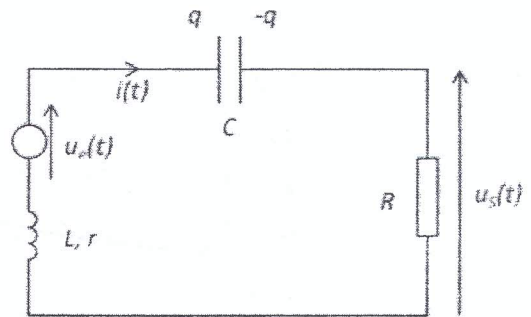


Figure 1

On note C la capacité du condensateur, R la résistance d'entrée d'un « détecteur en quadrature » qui ne sera pas étudié ici et on pourra noter $R_{tot} = R + r$ la résistance totale du circuit série. On étudie la réponse de ce filtre, en régime permanent sinusoïdal, à une excitation notée $u_e(t) = E \cos(\omega t)$, ω étant une pulsation quelconque. La tension de sortie est $u_s(t)$.

1. En étudiant rapidement les comportements limites des différents dipôles aux basses et hautes fréquences, déterminer la nature du filtrage réalisé.
2. Déterminer la fonction de transfert complexe définie par $\bar{H} = \frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_e}$ en fonction de R, r (ou R_{tot}), L, C et ω .
3. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\bar{H} = \frac{a}{1 + jb(x - \frac{1}{x})}$$

avec $x = \omega \sqrt{LC}$, $a = \frac{R}{R_{tot}}$ et b est une constante à déterminer.

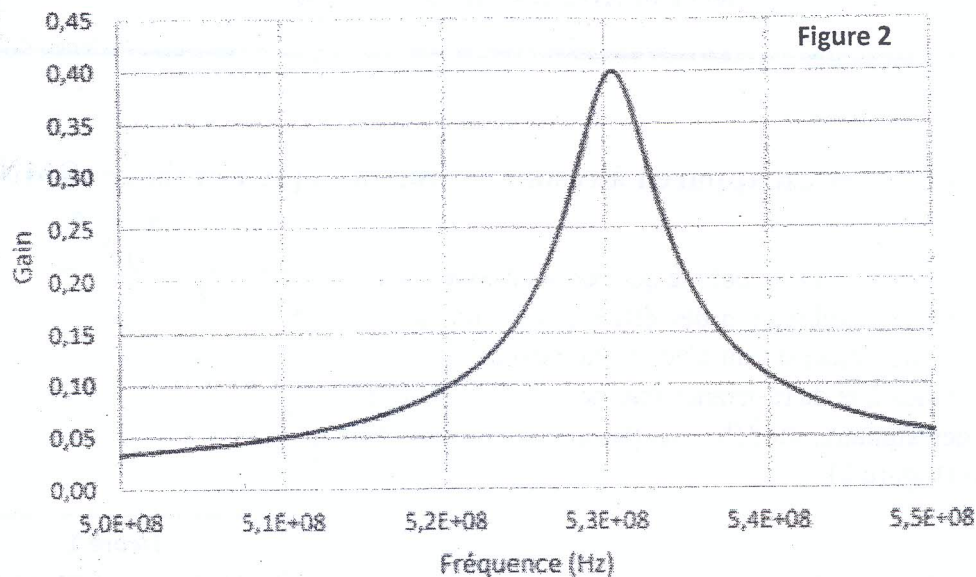
Dans la suite du problème, on va étudier le maximum de la fonction de transfert :

4. Quelle est la signification physique de $|\bar{H}|$? Quelle est la valeur de la pulsation, notée ω_{max} , qui permet d'atteindre la valeur maximale de $|\bar{H}|$, notée H_{max} ?
5. Exprimer H_{max} en fonction de R et R_{tot} .

6. Déterminer l'écart $\Delta\omega$ entre les deux pulsations de coupure telles que $|\bar{H}| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$. On appelle cette plage de pulsation la bande passante du filtre.

7. On caractérise l'acuité de ce filtre par le quotient $Q = \frac{1}{\sqrt{LC}\Delta\omega}$, nommé facteur de qualité du filtre. Exprimer Q en fonction des valeurs des composants du circuit.

8. On donne sur la figure 2 le diagramme de la fonction $Gain = |\bar{H}|$ en fonction de la fréquence f . En considérant que $R_{tot} = 1 \Omega$, déterminer les valeurs de L et C .

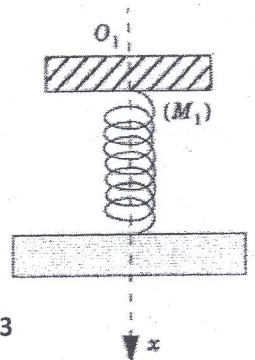


Problème 2 : Oscillateurs Mécaniques

Le sismographe est utilisé pour détecter les séismes. Il joue un rôle dans la sûreté des installations.

Le miroir (M1) de masse m est fixé à un ressort qui le supporte. Le ressort, de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et de masse négligeable, est assujéti à se déplacer verticalement grâce à un système de guidage. L'ensemble repose sur le sol qui constitue un référentiel galiléen. Le miroir (M1) peut osciller verticalement le long de l'axe Ox . On suppose que ses oscillations sont amorties par une force de frottement fluide $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée de (M1) et μ le coefficient de frottement positif.

À l'équilibre, la surface réfléchissante de (M1) est dans un plan horizontal contenant O_1 (voir la Figure 3). On repère la position du miroir par son élongation x par rapport à la position d'équilibre. Par définition, $x = 0$ à l'équilibre.



1. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de ℓ_0 , m , g et k . Vérifier l'expression obtenue par une analyse dimensionnelle et commenter le résultat.

2. On suppose que le miroir (M1) est abaissé d'une petite hauteur x_0 puis lâché sans vitesse initiale. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme suivante avec λ (rappel : $2\lambda = \omega_0/Q$) et ω_0 des constantes à exprimer en fonction de μ, k et m :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La figure 4 donne le graphe $x(t)$ du mouvement de (M1).

3. En s'appuyant sur ce graphe, résoudre l'équation différentielle.

4. Calculer, à partir du graphe de la figure 4, les valeurs de λ et ω_0 . En déduire une estimation numérique de μ et de k en prenant $m = 100 \text{ g}$.

Le sol, sur lequel repose le système précédent, est maintenant animé d'un mouvement de translation sinusoïdal suivant l'axe x ayant pour expression tel que $x_{sol}(t) = X_{sol} \cos(\omega_1 t)$. En régime permanent, la grandeur $x(t)$ peut se mettre sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega_1 t + \varphi)$. On admettra que l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ est de la forme : $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_1^2 x_{sol}$

5. En utilisant la notation complexe, donner l'expression de la transmittance $\bar{Y} = \bar{x}/\bar{x}_{sol}$ du système en fonction de ω_1, ω_0 et λ .

6. On note Y le module de $\bar{Y}$. Quelle est la limite de Y quand $\omega_1 \rightarrow +\infty$? Commenter le résultat.

7. Pour alléger les écritures, on pourra poser $u = \omega_1/\omega_0$ puis $z = \omega_0/\omega_1$. Déduire l'expression suivante :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - 1)^2 + 4\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 z^2}}$$

8. Montrer qu'il existe une valeur limite de λ pour qu'on parle de phénomène de résonance ?

9. Dans un bon sismographe, le mouvement de (M1) doit suivre le plus fidèlement possible celui du sol en évitant tout phénomène de résonance. Il est donc préférable de privilégier la bande passante la plus large possible afin d'acquérir des informations sur des séismes ou des mouvements de fréquences différentes. En vous aidant du graphique ci-dessous, expliquer comment choisir la valeur de Q . Reproduire le graphe pour clarifier votre choix).

