

Devoir surveillé de mathématiques.

Durée : 1H :30

Date : 31 Octobre 2023

Nombre de pages : 2

Exercice :1

On considère la fonction f définie par :

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $] -1, 1[$ et que pour tout x non nul dans $] -1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$

3. Calculer $f'(0)$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
5. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ dans un intervalle que l'on déterminera.
6. Étudier le domaine de dérivabilité de f^{-1} (sans l'expliciter).

Exercice :2

On considère les suites $(H_n)_{n \geq 1}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n)$$

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$?
2. Montrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est croissante et déduire sa limite.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
5. Montrer que $H_n \sim \ln(n)$. Retrouver la limite de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ puis la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

6. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite notée $\gamma \in]0, 1]$.

Exercice :3

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n(x) = (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}$

1. Justifier qu'il existe un polynôme Q_n tel que $P_n(x) = xQ_n(x)$
2. Montrer que P_n peut s'écrire sous la forme : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1}$
3. En déduire le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant du polynôme P_n .
4. On note $\omega_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$
 - (a) Montrer que pour $k \neq n$: $\frac{\omega_k-1}{\omega_k+1} = i \tan(\frac{k\pi}{2n})$.
 - (b) Pour $k \in \{n+1, \dots, 2n-1\}$, montrer que $\tan(\frac{k\pi}{2n}) = -\tan(\frac{(2n-k)\pi}{2n})$
 - (c) Montrer que $P_n(x) = 4nx \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - \tan^2(\frac{k\pi}{2n}))$

Bon travail

