

Examen de mathématiques .

Durée : 2H

Date : 2 Janvier 2024

Nombre de pages : 2

Exercice : 1

E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2.

On note :

$$F = \{P \in E \mid P(-1) = P(0) = 0\}, \quad G = \{P \in E \mid P(-1) = P(1) = 0\}$$

$$\text{et } H = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$$

- Montrer que F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels de E et déterminer leurs dimensions.
- Déterminer $F \cap G$, $F \cap H$ et $H \cap G$.
- Donner une base de chacun des sous-espaces vectoriels F, G et H .
- Soient $P_0(x) = x(x+1)$, $P_1(x) = x^2 - 1$ et $P_2(x) = x(x-1)$
 - Vérifier que $P_0 \in F$, $P_1 \in G$ et $P_2 \in H$.
 - Montrer que $B = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E .
- On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$
 - Calculer le déterminant de P et en déduire que c'est une matrice inversible.
 - Déterminer l'inverse de P .
 - En déduire les coordonnées de chaque vecteur de la base canonique $B_c = (1, X, X^2)$ dans la base B .
- Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{aligned}$$

- Montrer que f est une application linéaire.
- Déterminer $\ker(f)$ puis déduire que f est un isomorphisme.
- Écrire $M = \text{Mat}(f; B, \mathcal{B}_c)$, la matrice de f dans les bases B de E et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique $\mathbb{R}^3$.

Exercice :2

Dans tout l'exercice on note

- $E = M_3(\mathbb{R})$, O_3 la matrice nulle de E et I_3 la matrice identité.
- tA la transposée d'une matrice A de E .
- Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et la colonne j qui est égal à 1.
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E , c'est à dire des matrices $A \in E$ telles qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A^n = O_3$

Questions de cours

1. Quelle est la dimension de E ? Donner sans justification une base de E .
2. L'ensemble D des matrices diagonaux de E est-il un sous-espace vectoriel de E ? Donner une caractérisation simple des matrices inversibles de D .

Propriétés élémentaires

1. Calculer $E_{1,2}^2$, $E_{1,3}^2$ et $E_{2,3}^2$ et déduire que $\mathcal{N} \neq \{O_3\}$.
Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{N}$.
2. A peut-elle être une matrice inversible? Justifier.
3. Montrer que $\text{Vect}(A) \subset \mathcal{N}$.
4. Montrer que ${}^tA \in \mathcal{N}$.
5. En déduire que $E_{3,1}$, $E_{3,2}$ et $E_{2,1}$ sont des éléments de $\mathcal{N}$.
6. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} E_{i,j}$, montrer que B est inversible et en déduire que $\mathcal{N}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
7. Soit $P \in E$ une matrice inversible, on note $M = PAP^{-1}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PA^nP^{-1}$ et déduire que $M \in \mathcal{N}$.
8. Soient p le plus petit entier naturel non nul tel que $A^p = O_3$ et $U \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul tel que $A^{p-1}U \neq 0$.
 - (a) Montrer que $(U, AU, \dots, A^{p-1}U)$ est une famille libre. (ind : multiplier par A^{p-1} , A^{p-2} , ...)
 - (b) En déduire que $p \leq 3$

Cas particulier .

Soit $X = (x, y, z)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\lambda = X^tX$ et $M = {}^tXX$.
2. Quel est le rang de la matrice M ?
3. Montrer que $M^2 = \lambda M$.
4. En déduire que $M \in \mathcal{N}$ si et seulement si $\lambda = 0$.

Bon travail