



DEVOIR DE SYNTHESE - 1^{ère} semestre

Épreuve de Physique

(2^{ème} Année de Préparation Biologie - Géologie)

Mercredi 03 Janvier 2024 de 8h30 à 11h30

I. Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire

On considère l'écoulement parfait et stationnaire d'un fluide à travers un système ouvert (S), définissant un volume de contrôle indéformable et fixe dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ et présentant une entrée et une sortie (**Figure 1**).

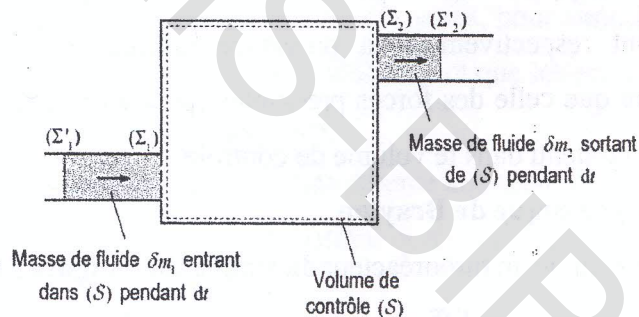


Figure 1 - Fluide en écoulement stationnaire : système fermé étudié

On définit comme système d'étude le système fermé, noté (S^*), constitué du fluide contenu à l'instant t dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_1 qui y rentre entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droites (Σ'_1) et (Σ_1), et définissant un sous-système (S_1). À l'instant $t + dt$, il est constitué du fluide contenu dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_2 qui en sort entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droites (Σ'_2) et (Σ_2), et définissant un sous-système (S_2).

On note T_i , P_i , ρ_i , e_{ci} , e_{pi} , u_i et h_i respectivement la température, la pression, la masse volumique, l'énergie cinétique massique, l'énergie potentielle de pesanteur massique, l'énergie interne massique et l'enthalpie massique du fluide contenu dans chaque sous-système (S_i) où $i = 1, 2$.

Q1. En traduisant la conservation de la masse du fluide contenu dans le système (S^*), justifier que le débit massique du fluide en entrée est égal à celui en sortie :

$$\frac{\delta m_1}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt} = D_m$$

Q2. Montrer que le travail massique des forces pressantes reçu par le fluide contenu dans le système (S^*) pendant la durée dt s'écrit :

$$w_p = \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}$$

Q3. Montrer que la variation d'énergie interne du fluide contenu dans le système (S^*) pendant la durée dt s'écrit :

$$dU = D_m \cdot (u_2 - u_1) \cdot dt$$

Donner, sans calculs supplémentaires, les expressions des variations d'énergie cinétique macroscopique dE_c et d'énergie potentielle de pesanteur dE_p du fluide.

Q4. À partir d'un bilan énergétique pour le fluide contenu dans le système (S^*) pendant la durée dt , établir l'expression du premier principe pour un écoulement stationnaire :

$$D_m \cdot [(h_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - (h_1 + e_{c,1} + e_{p,1})] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où $\mathcal{P}_u$ et $\mathcal{P}_{th}$ sont respectivement la puissance mécanique des forces extérieures non conservatives autre que celle des forces pressantes (puissance dite utile) et le flux thermique reçus par le fluide contenu dans le volume de contrôle.

II. Cycle thermodynamique de Brayton

Dans cette partie on étudie un turboréacteur dit simple flux (**Figure 2**) pour lequel le gaz entrant dans le réacteur passe dans un diffuseur pour en diminuer la vitesse avant d'être comprimé par le compresseur. Le gaz comprimé arrive dans une chambre de combustion où il est chauffé avant d'être détendu partiellement dans la turbine qui fournit la puissance nécessaire au compresseur. En sortie de turbine, le gaz reste à une pression relativement élevée par rapport à la pression extérieure et il est détendu dans une tuyère, ce qui permet de l'accélérer : c'est cette accélération qui permet la propulsion de l'avion. Le turboréacteur simple flux est principalement utilisé dans l'aviation militaire.

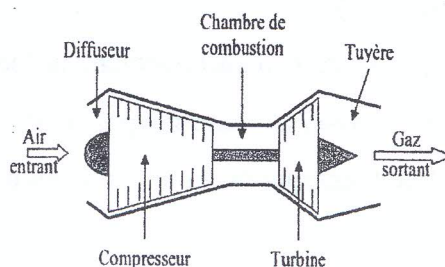


Figure 2 - Schéma de principe d'un turboréacteur simple flux

Un turboréacteur fonctionne selon le cycle théorique ouvert de Brayton. Les conditions d'étude de ce cycle sont les suivantes :

- l'air est considéré comme un gaz parfait. Sa capacité thermique massique à pression constante c_p est supposée constante, comme le rapport γ entre les capacités thermiques isobare et isochore. On prendra $\gamma = 1,35$ et $c_p = 1,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- les variations d'énergie potentielle sont négligeables,
- l'énergie cinétique est supposée négligeable entre l'entrée du compresseur et la sortie de la turbine.

En entrée du diffuseur, l'air est à l'état (1) : (P_1, T_1) . On considère que le diffuseur est idéal, ce qui revient à dire que l'énergie cinétique du gaz après traversée du diffuseur est négligeable devant les autres termes énergétiques et que la traversée du diffuseur est adiabatique et réversible. En entrée du compresseur, l'air se trouve à l'état (2) : (P_2, T_2) et est amené à l'état (3) : $(P_3 = 10P_2, T_3)$ par une compression adiabatique réversible.

Dans la chambre de combustion, l'air, mélangé au carburant, subit un échauffement isobare réversible jusqu'à l'état (4) : $(P_4, T_4 = 1400\text{K})$. Bien que les compositions du gaz à l'entrée et à la sortie de la chambre de combustion soient différentes, pour simplifier la modélisation, on suppose que celle-ci sert uniquement à réchauffer l'air et que les propriétés de l'air ne sont pas modifiées par ce changement de composition.

L'air parvient alors dans la turbine où il subit une détente adiabatique réversible jusqu'à l'état (5) : (P_5, T_5) . Enfin, il se détend de façon adiabatique et réversible dans la tuyère et arrive dans l'état (6) : (P_6, T_6) .

On considère un avion qui vole avec une vitesse de croisière $V_a = 260 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ par rapport à l'air considéré au repos. À cette altitude, l'air est à la pression de $34,5 \text{ kPa}$ et à la température de -40°C . L'air entre dans le compresseur avec un débit massique $D_m = 45 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

On rappelle que l'expression du premier principe pour une masse $m = 1 \text{ kg}$ de fluide en écoulement au travers d'une machine est :

$$\Delta h + \frac{\Delta v^2}{2} + g \cdot \Delta z = w_u + q_{th}$$

où Δh représente la différence $h_s - h_e$ entre les enthalpies massiques (en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) du fluide à la sortie h_s et à l'entrée h_e de la machine,

$$\Delta v^2 = v_s^2 - v_e^2$$

avec v_s et v_e les vitesses du fluide à la sortie et à l'entrée de la machine,

$$\Delta z = z_s - z_e$$

avec z_s et z_e les altitudes du fluide à la sortie et à l'entrée de la machine, w_u le travail massique utile, c'est-à-dire le travail massique (en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) échangé entre une masse $m = 1 \text{ kg}$ de fluide et les parois mobiles de la machine, q_{th} le transfert thermique massique entre le kilogramme de fluide et la machine (en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$).

Q5. Montrer que la température T_2 est donnée par l'expression suivante :

$$T_2 = T_1 + \frac{V_a^2}{2 \cdot c_p}$$

Effectuer l'application numérique.

Q6. Donner l'expression de la pression P_2 en fonction de P_1 , T_1 , T_2 et γ . Effectuer l'application numérique.

Q7. Établir l'expression du travail massique utile w_{comp} fourni à l'air par le compresseur. En prenant $T_3 = 480 \text{ K}$, calculer la puissance $\mathcal{P}_{comp}$ de ce dernier.

Q8. Sachant que le travail fourni par la détente du gaz dans la turbine est intégralement reçu par le compresseur, déterminer l'expression de la température T_5 en fonction de T_2 , T_3 et T_4 . Calculer la valeur de T_5 . En déduire la valeur de la pression P_5 .

Q9. Donner l'expression de la vitesse de sortie du gaz v_s en sortie de tuyère en fonction de T_5 , T_6 et c_p . Calculer la valeur de v_s sachant que $T_6 = 680 \text{ K}$.

Q10. Sachant que la force appliquée par l'avion à l'air a pour expression : $\vec{F}_{air-avion} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_a)$.

Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ liée à la force propulsive (puissance reçue par l'avion de la part de l'air).

Q11. Calculer le rendement η du turboréacteur qui correspond au rapport entre la puissance liée à la force propulsive et la puissance qui sert à chauffer le gaz dans la chambre de combustion $\mathcal{P}_{chamb} = 45,5 \text{ MW}$.

III. Etude théorique d'une tuyère

On considère une tuyère de révolution d'axe horizontal ($x'x$), de section lentement variable, dans laquelle se produit une détente d'air. L'air est assimilé à un gaz parfait, évoluant de façon adiabatique réversible, en écoulement permanent unidirectionnel, de telle sorte que les paramètres physiques : pression P , température T , vitesse v et masse volumique ρ ne dépendent que de l'abscisse x .

En $x = 0$, à l'entrée de la tuyère de section S_e , la pression du gaz est notée P_e , sa température T_e , sa masse volumique ρ_e et la vitesse v_e . La capacité thermique massique à pression constante c_p et le rapport γ entre les capacités thermiques isobare et isochore sont supposés constants.



À l'abscisse x , au niveau de la section $S(x)$, la vitesse du gaz $v(x)$ de pression $P(x)$, a pour expression :

$$v(x) = \sqrt{v_e^2 + 2 \cdot c_p \cdot T_e \cdot \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$



Q12. On pose $v_m = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot T_e}$. Vérifier que cette quantité est homogène à une vitesse.

Q13. Montrer que le débit massique D_m à l'abscisse x a pour expression :

$$D_m = \rho_e \cdot v_m \cdot S(x) \cdot G(x)$$

Donner l'expression de la fonction $G(x)$ en fonction de P_e , $P(x)$, v_e , v_m et γ .

IV. Propriétés de la toison de laine

Une toison de laine est caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine} . On considère par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique $\lambda_{laine} = 0,040 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q14. La loi de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit le lien entre la densité volumique de transfert thermique et le gradient de température : $\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$

Quelle est la dimension de la conductivité thermique λ ?

On considère un parallélépipède, de longueur L , de hauteur H et d'épaisseur e petite, constitué d'un matériau homogène de conductivité λ , de masse volumique μ et de capacité thermique massique c (**Figure 3**). Le problème est supposé unidimensionnel, la température ne dépend que de la variable z et du temps t .

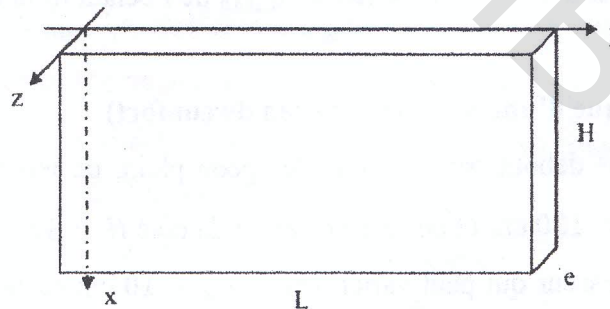


Figure 3 - Géométrie du conducteur thermique

Q15. Sur quelle direction est le vecteur densité $\vec{j}_{th}$ de courant thermique ? De quelles variables dépend-il ?

Q16. Faire un bilan énergétique sur la tranche de matériau comprise entre z et $z + dz$ et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la température $T(z, t)$.

Q17. Que devient-elle en régime stationnaire ? Le vecteur $\vec{j}_{th}$ dépend-il de z ?

Q18. On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{entrée}$ en $z = 0$ et T_{sortie} en $z = e$. Montrer que la puissance thermique φ_{th} qui traverse le matériau s'écrit sous la forme :

$$\varphi_{th} = \frac{\lambda \cdot L \cdot H}{e} (T_{entrée} - T_{sortie})$$

Q19. Définir puis exprimer la résistance thermique R_{th} du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?

On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée (**Figure 4**). L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur e et de surface S séparées par une plaque chaude.

Un même flux thermique φ_{th} , engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures T_c , T_f des plaques chaude et froides sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.



Figure 4 - Principe de la plaque chaude gardée

Q20. Exprimer l'expression de la conductivité λ_{laine} de l'échantillon en fonction de φ_{th} , e , S , T_c et T_f .

V. Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme $\theta_{eq} = 39^\circ C$, de longueur $L = 100 \text{ cm}$ et de section carrée de côté $H = 30 \text{ cm}$. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_M = 10 \text{ cm}$ de laine avant la tonte à $e = e_m = 0,5 \text{ cm}$ après la tonte. La situation est représentée en **Figure 5** et en **Figure 6**.

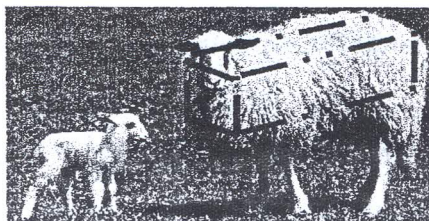


Figure 5 - Modélisation de la brebis

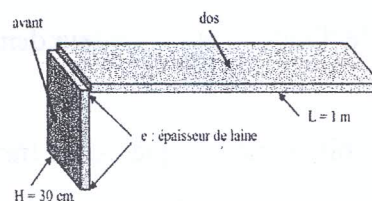


Figure 6 - Modélisation de la toison. Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées.

Q21. Montrer que la résistance R_{diff} de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords s'écrit sous la forme :

$$R_{diff} = \frac{e}{2 \cdot \lambda_{laine} \cdot (2 \cdot L \cdot H + H^2)}$$

Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

Q22. La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égale à :

$$\vec{j}_{cc} = -h \cdot (T_{ext} - T_{air}) \cdot \vec{n}$$

avec T_{ext} la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température T_{air} et le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ orienté de la brebis vers l'extérieur. On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à $h = 4,0 \text{ W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-1}$.

En déduire en fonction de h , L et H la résistance de conducto-convection R_{cc} à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire R_r . Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance P_r due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme :

$$P_r = K \cdot A \cdot (T_{ext} - T_{air})$$

avec A l'aire de la surface extérieure de la brebis, T_{ext} la température de cette surface en contact avec l'air de température T_{air} . La constante K a pour valeur $K = 5,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q23. Exprimer la résistance thermique de rayonnement R_r en fonction de K , L et H .

Q24. Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis $T_{int} = \theta_{eq} = 39^\circ\text{C}$ et la température de l'air T_{air} .

Montrer que la résistance équivalente R_k s'écrit sous la forme :

$$R_k = R_{diff} + \frac{R_{cc} \cdot R_r}{R_{cc} + R_r}$$

Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5^\circ\text{C}$. En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation. La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires en toute situation : $\dot{m} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée



quand elle vient d'être tondue : $\dot{m}' = 2. \dot{m}$ et que la température extérieure est supérieure à $5,1^\circ\text{C}$. L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut $\Delta H_{vap}^0 = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q25. Dédurre que la puissance $\mathcal{P}_{m0}$ apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{P}_{m0} = \dot{m} \cdot \Delta H_{vap}^0 + \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1}$$

Évaluer numériquement la valeur de $\mathcal{P}_{m0}$ pour $T_{air} = T_0 = 5^\circ\text{C}$.

Q26. Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5^\circ\text{C}$.

