

Durée : 1H

Date : 5 Mars 2024

Nombre de pages : 1

**Exercice : 1**

Une entreprise souhaite recruter un cadre.  $n$  personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est  $p \in ]0, 1[$ . On pose également  $q = 1 - p$ . On définit la variable aléatoire  $X$  par  $X = k$  si le  $k$ -ième candidat qui passe le test est engagé, et  $X = n + 1$  si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. En dérivant la formule donnant  $\sum_{k=0}^n x^k$ , calculer  $\sum_{k=1}^n x^{k-1}$  pour  $x \neq 1$ .
3. En déduire l'espérance de  $X$ .
4. Quelle est la valeur minimale de  $p$  pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

**Exercice : 2**

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les deux vecteurs  $u = (1, 2, 3)$  et  $v = (-3, 1, 5)$  et on note  $F = \text{Vect}(u, v)$

1. Déterminer le réel  $\lambda$  tel que le vecteur  $v' = u + \lambda v$  soit orthogonal à  $u$ .
2. Pour tout  $a \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $f(a) = a - \frac{\langle a, u \rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle a, v' \rangle}{\|v'\|^2} v'$ 
  - (a) Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(a) \in F^\perp$ .  
Dans toute la suite, on choisit  $w = (-2, 3, 2)$
  - (b) Calculer  $w' = f(w)$ , que peut-on dire de la famille  $\mathcal{B} = (u, v', w')$  ?
  - (c) En déduire à partir de  $\mathcal{B}$  une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Soit  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ .
  - (a) Montrer que  $f = id_{\mathbb{R}^3} - p$
  - (b) Écrire la matrice  $A$  de l'endomorphisme  $p$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
  - (c) En déduire la matrice  $M$  de l'endomorphisme  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
4. On considère la matrice  $C$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  donnée par :  $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 
  - (a) Justifier que  $C$  est diagonalisable.
  - (b) Montrer que  $F$  est un sev propre de  $C$  associé à la valeur propre 3.
  - (c) Que représente la base  $\mathcal{B}'$  pour la matrice  $C$ .