

Examen Final De Mathématiques .

Durée : 2h

Date : 06 Mai 2024

Nombre de pages : 2

PROBLÈME

Dans ce problème, a, b, c et d désignent des entiers naturels. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ dans lequel I_2 désigne la matrice identité et O_2 la matrice nulle. Ce problème est consacré à une expérience aléatoire qui peut-être représentée par une matrice de $M_2(\mathbb{R})$. En partie A, on démontre quelques propriétés algébriques des matrices qui permettent cette représentation. En partie B, on étudie cette expérience aléatoire dans un cas particulier. Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A : Matrices d'ajout

On considère une expérience aléatoire que l'on suppose modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et qui nécessite le matériel suivant :

- Une urne de taille infinie contenant initialement une boule noire et une boule blanche.
- Un stock infini de boules noires.
- Un stock infini de boules blanches.

Cette expérience aléatoire consiste à tirer successivement et indéfiniment une boule dans l'urne de façon aléatoire (les boules sont supposées indiscernables au toucher). À chaque étape, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle fixée pendant toute l'expérience : si on a tiré une boule noire, on ajoute dans l'urne a boules noires et b boules blanches, si on a tiré une boule blanche, on ajoute c boules noires et d boules blanches. Cette règle est résumée par la matrice ci-dessous dite "matrice d'ajout" :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Lorsque $a + b = c + d$, on notera σ_A cette valeur commune et on dira que la matrice d'ajout A est équilibrée. On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices d'ajout équilibrées (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de tailles 2, à coefficients entiers naturels et dont la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne).

1. Exemple : Dans cette question, on choisit :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) À une certaine étape, l'urne contient 3 boules noires et 5 blanches et on tire une boule noire. Quelle est la composition de l'urne à l'étape suivante ?
- (b) Déterminer σ_A . Que représente σ_A ? Est-il possible qu'à une certaine étape, il y ait 22 boules blanches et 20 boules noires (justifier votre réponse) ?
2. On revient au cas général.
- (a) Justifier que $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- (b) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\sigma_A = 0 \Leftrightarrow A = O_2$.
- (c) Soient $A, A' \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}$, montrer que $A + kA'$ et AA' sont dans $\mathcal{A}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$
- (a) Montrer que σ_A est une valeur propre de A et donner un vecteur propre associée.
- (b) On note $\delta_A = a - c = d - b$, vérifier que δ_A est une valeur propre de A .
- (c) Montrer que le déterminant de A est égale à $\sigma_A \delta_A$.
- (d) On note $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- i. Vérifier que $AA' = \sigma_A \delta_A I_2$.
- ii. En déduire que A est inversible et d'inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{A}$ si et seulement si $A = I_2$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. Démontrer que toute matrice d'ajout équilibrée est diagonalisable (on pourra discuter selon que $\sigma_A = \delta_A$ ou $\delta_A < \sigma_A$) et en déduire l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{A}$ non inversibles.

Partie B : Une matrice d'ajout particulière

On fixe $\sigma \in \mathbb{N}$ et on réalise l'expérience aléatoire précédemment décrite dans le cas où :

$$A = \sigma I_2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ème tirage est noire, 0 si la boule tirée au n-ème tirage est blanche. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ égale au nombre de boules noires à l'issue du n-ème tirage.

1. (a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par S_n et justifier que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le système (S) ci-dessous :

$$(S) : \begin{cases} S_0 &= 1 \\ S_{n+1} &= S_n + \sigma X_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in S_n(\Omega) : P(X_{n+1} = 1 | S_n = s) = \frac{s}{2+\sigma n}$
2. Calculer la probabilité $P(X_{n+1} = 1)$
3. En déduire que $E(X_{n+1}) = \frac{E(S_n)}{2+\sigma n}$
4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que : $E(S_n) = \frac{2+\sigma n}{2}$
5. En déduire enfin la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Bon Travail