

EXAMEN DU 2^{ème} SEMESTRE (Devoir de contrôle)

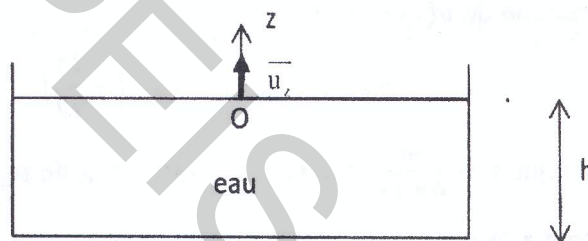
Épreuve de Physique
(2^{ème} Année de Préparation Biologie - Géologie)

Mercredi 13 Mars 2024 de 8h30 à 10h30

On considère un bassin rempli d'eau sur une hauteur $h = 1 \text{ m}$. L'eau liquide sera considérée comme un fluide incompressible de masse volumique $\rho_e = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

On définit pour les questions 1 à 6 un axe Oz ascendant, l'origine étant choisie au niveau de la surface de l'eau, ainsi qu'un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ dirigé vers le haut.

L'accélération de la pesanteur sera notée g et sa valeur supposée constante : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.



1. Loi de pression hydrostatique

1.a. En considérant l'équilibre d'une couche d'eau de section S s'étendant entre les cotes z et $z + dz$, démontrer que la loi de l'hydrostatique relative à la pression est :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho_e g$$

On notera P_0 la pression atmosphérique à la cote $z = 0$ où se trouve l'interface air-eau et ρ_e étant une constante, en déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de z .

1.b. Quelle est la pression maximale à l'intérieur du bassin ?

2. Ordre de grandeur de la pression dans l'eau

2.a. Quelle est la valeur moyenne de la pression atmosphérique ? Donner le résultat en unités du système international.

2.b. Comparer numériquement la pression maximale dans le bassin et la pression atmosphérique.

2.c. Sur quelle profondeur faudrait-il plonger pour doubler la pression ? Le bassin serait-il assez profond ?

2.d. À combien monte la pression au fond des fosses océaniques de profondeur 10 km environ ?

3. Principe d'Archimède

Enoncer et démontrer le principe d'Archimède.

4. Remontée d'une balle de ping-pong du fond du bassin

Une balle de ping-pong de masse $m = 2,3 \text{ g}$, de rayon $r = 1,9 \text{ cm}$ que l'on considèrera comme une sphère

incompressible est lâchée depuis le fond du bassin en $z = -h$ sans vitesse initiale. Elle est repérée par sa cote $z(t)$. On rappelle que l'origine des z est prise à la surface. La balle est soumise à son poids $\vec{P}$, à la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ dans l'eau et à une force de frottement fluide obéissant à la loi de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$.

Où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la balle, η est la viscosité dynamique du fluide ; elle a pour valeur $\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

La loi de Stokes suppose, pour être appliquée, un écoulement de **nombre de Reynolds inférieur à 0,1**.

4.a. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds et son unité.

4.b. Calculer la valeur numérique de la vitesse maximale v_{max} admissible pour cette balle qui remonte si on veut pouvoir appliquer la loi de Stokes.

4.c. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (RFD), monter que l'équation différentielle du mouvement de la balle est :

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m} v(t) = \frac{4\pi\rho_e r^3 g}{3m} - g$$

4.d. En déduire que l'expression de $v(t)$ s'écrit :

$$v(t) = v_{lim} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})]$$

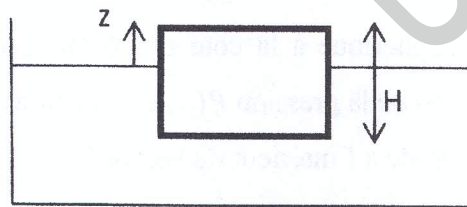
Avec : Le temps caractéristique $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$ et la vitesse limite atteinte $v_{lim} = \frac{4\pi\rho_e r^3 g - 3mg}{18\pi\eta r}$.

4.e. Calculer numériquement τ et v_{lim} .

4.f. Commenter le résultat et montrer que l'on sort des conditions de validité de la loi de Stokes.

5. Oscillation d'un flotteur à la surface du bassin

Un flotteur cylindrique de masse volumique μ flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e . Le niveau supérieur du flotteur est repéré par sa cote z par rapport au niveau de la surface de l'eau.



On suppose que le diamètre D du flotteur est très grand devant sa hauteur H , de façon à éviter tout basculement. On négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air sur la partie émergée du flotteur. On néglige aussi tout frottement dans cette question. On suppose le bassin de volume suffisamment grand pour négliger les variations du niveau de l'eau.

5.a. Démontrer que la position d'équilibre z_{eq} est donnée par :

$$z_{eq} = H(1 - \frac{\mu}{\rho_e})$$

5.b. A quelle condition le flotteur flotte-t-il effectivement ?

6. Remontée d'une bulle d'air

Une bulle d'air, considérée comme un volume sphérique de gaz parfait de volume initial V_0 , se forme sans

vitesse initiale au fond du bassin de profondeur $h = 1 \text{ m}$. On admet que, au cours de sa remontée dans le fluide supposé parfait et incompressible, la pression dans la bulle est égale à la pression qui règne dans l'eau à l'altitude à laquelle elle se trouve. On suppose une évolution adiabatique réversible de l'air de la bulle. On suppose également que la température de l'eau et de la bulle au moment de sa création est $T_0 = 15^\circ\text{C}$. On prend le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$.

6.a. En utilisant la loi de Laplace en variables P et V et la loi $P(z)$ de l'hydrostatique dans l'eau, établie à la question 1, démontrer que l'expression du volume $V(z)$ de la bulles'écrit :

$$V(z) = V_0 \left(\frac{P_0 + \rho_e g h}{P_0 - \rho_e g z} \right)^{1/\gamma}$$

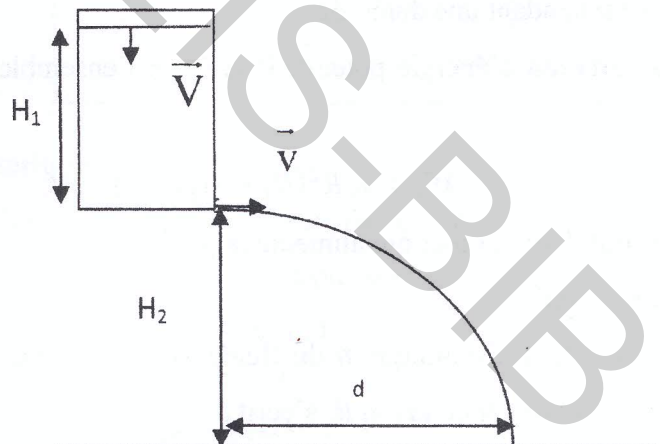
À l'arrivée à la surface ($z = 0$), la variation de volume de la bulle est-elle notable ?

6.b. En utilisant loi de Laplace en variables P et T et la loi $P(z)$, établir l'expression de sa température $T(z)$.

À l'arrivée à la surface ($z = 0$), la variation de température est-elle notable ?

7. Éjection de l'eau par une fontaine, portée du jet de la fontaine

Une fontaine réservoir éjecte l'eau avec une vitesse initiale horizontale grâce à un trou de surface s percé au fond d'un récipient cylindrique de surface S rempli sur une hauteur H_1 . $H_1(t)$ est donc le niveau d'eau de la fontaine par rapport à son fond.



7.a. On note $V = -dH_1/dt$ la vitesse de l'interface eau-air orientée positivement vers le bas. En supposant le fluide parfait incompressible et en écoulement quasi-permanent, en utilisant la relation de Bernoulli, démontrer que la vitesse v d'éjection de l'eau est donnée par:

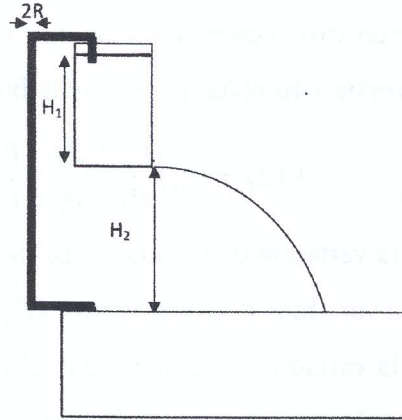
$$v = \sqrt{\frac{2 g H_1}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}}$$

7.b. Simplifier l'expression précédente si on suppose $S \gg s$. Utiliser ce résultat dans la question suivante.

7.c. L'orifice d'éjection horizontale de la fontaine est placé à une hauteur H_2 au-dessus de la surface de l'eau du bassin. On néglige tout frottement. Exprimer la distance horizontale d de l'orifice de la fontaine au point où le jet d'eau rencontre la surface de l'eau du bassin, en fonction de H_1 et H_2 .

8. Puissance nécessaire pour élever l'eau

L'eau, encore considérée comme un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ_e dans cette question, est prélevée par la pompe dans le bassin à une hauteur $H_1 + H_2$ plus bas sous la surface libre du réservoir de la fontaine à travers un tuyau cylindrique de rayon R considéré comme entièrement vertical. Le débit volumique est noté D_v .



8.a. Exprimer la vitesse v du fluide que l'on considère uniforme dans le tuyau en fonction du débit et du rayon du tuyau.

8.b. Exprimer la masse d'eau m_{eau} totale dans le tuyau. Exprimer la hauteur $h(t)$ parcourue par chaque particule d'eau de vitesse v pendant une durée Δt .

8.c. En déduire que la variation d'énergie potentielle ΔE_p de l'ensemble des particules contenues dans le tuyau est :

$$\Delta E_p = \pi R^2 (H_1 + H_2) \rho_e g v \Delta t$$

8.e. En déduire la puissance $\mathcal{P}$ du moteur qui alimente la pompe.

9. Caractère visqueux du fluide

En tenant compte de la viscosité dynamique η du fluide, on montre que, en régime permanent, la vitesse dans un tuyau cylindrique horizontal de rayon R , s'écrit :

$$v(r) = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

r est la distance à l'axe du cylindre, ΔP est la différence de pression ou pression motrice maintenue aux bords du tuyau de longueur L .

9.a. Par intégration du profil de vitesse sur une section circulaire, exprimer le débit volumique D_v de l'eau qui s'écoule dans le tuyau (loi de Poiseuille).

9.b. En déduire la résistance hydraulique du tuyau définie, grâce à une analogie électrique, par $R_H = \Delta P / D_v$.

9.c. Quelle est la puissance linéique $\mathcal{P}_{linéique}$ développée par la pompe nécessaire pour entretenir ce débit ?

Raisonner en termes mécaniques ou par analogie électrique avec la puissance dissipée par effet Joule.

9.d. On considère maintenant que le fluide est acheminé par deux tuyaux de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}}$, la surface de la section de l'ensemble de ces deux tuyaux est donc égale à la surface de la section d'un gros tuyau de rayon R . Que devient alors le débit D'_v acheminé par ces deux petits tuyaux sous la même pression motrice ?