

Épreuve de Physique  
(2<sup>ème</sup> Année de Préparation Biologie - Géologie)

Jeudi 09 Mai 2024 de 8h30 à 11h30

DEVIOR DE SYNTHESE DU 2<sup>ème</sup> SEMESTRE

**Problème I : Oscillateur harmonique**

On se place dans le référentiel du laboratoire  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen dans lequel on considère une masse  $M$  accrochée à un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide  $\ell_0$  et pouvant se déplacer sur un plan horizontal le long de l'axe  $(Ox)$

(Figure 1). Le déplacement de  $M$ , supposée ponctuelle, est limité aux petites oscillations autour de la position d'équilibre. La masse du ressort est supposée négligeable comparée à  $M$  dont le poids est compensé par la réaction du plan.

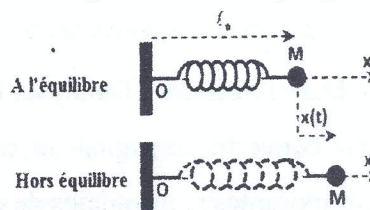


Figure 1

Hors équilibre, on repère la position de  $M$  par l'abscisse  $x(t)$  comptée à partir de sa position d'équilibre. La masse  $M$  est aussi soumise à :

- Une force de frottement  $\vec{F}_f = -\alpha \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x$  où  $\alpha$  est une constante positive.
- Une force excitatrice  $\vec{F}_e = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$  avec  $F_0$  et  $\omega$  sont deux constantes positives.

1. Etablir l'équation de mouvement de la masse  $M$  et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e(t)$$

Donner les expressions de  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $e(t)$ .

2. On se place dans un premier cas où  $\vec{F}_e = \vec{0}$  et  $\vec{F}_f = \vec{0}$ . Exprimer la solution de cette équation sachant qu'on a :  $x(t=0) = x_0$  et  $\frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = 0$ . Exprimer les énergies cinétique  $E_c(t)$  et potentielle  $E_p(t)$  de cet oscillateur. Vérifier que son énergie mécanique  $E_m$  est conservée.

3. Dans la suite on considère le cas où  $\vec{F}_e \neq \vec{0}$  et  $\vec{F}_f \neq \vec{0}$ . En régime établi, on exprimera

la solution de l'équation de mouvement sous la forme :  $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$  où  $\varphi$  est une phase à l'origine. On cherche une solution  $\bar{x}(t)$  en notation complexe.

a- Déterminer l'expression de l'amplitude  $X_0$  et la mettre sous la forme :

$$X_0(u) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Avec :  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

b- En déduire que  $X_0(u)$  passe par un maximum pour  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  à condition que

$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite.

c- Déterminer l'amplitude maximale  $X_{0\max}$  à la résonance.

4. Montrer que la moyenne dans le temps de la variation de l'énergie mécanique  $\frac{dE_m}{dt}$  du système masse-ressort est nulle. Interpréter.

5. Dans l'objectif d'analyser le spectre d'un signal sonore périodique, on utilise un microphone qui convertit ce signal en une tension électrique  $v_e(t)$ , puis un filtre qui sélectionne les composantes sinusoïdales de cette tension.

Soit  $v_s(t)$  la tension de sortie du filtre, sa fonction de transfert complexe s'écrit :

$$\bar{H}(ju) = \frac{\bar{v}_s}{\bar{v}_e} = \frac{H_0}{1 + jQ(u - \frac{1}{u})}$$

$H_0$ ,  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $Q$  sont des grandeurs positives caractéristiques du filtre.

Exprimer le gain réel  $G(u) = |\bar{H}(ju)|$  et tracer son allure en fonction de  $u$ .

6. Déduire la pulsation et le gain réel de ce filtre à la résonance.

7. Tracer l'allure du diagramme asymptotique de Bode (gain en décibel). Préciser les asymptotes. Quelle est la nature de ce filtre ?

8. Déterminer la bande passante ( $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ) correspondante à  $G(u) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ .

9. On réalise une expérience dans laquelle le filtre est soumis à un signal d'entrée  $v_e(t)$  de forme carrée, d'amplitude  $V_0$ , de période  $T$  et de fréquence  $f = \frac{1}{T}$  (Figure 2).

La décomposition en série de Fourier de  $v_e(t)$  s'écrit :

$$v_e(t) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)2\pi ft]$$

Décrire le spectre de ce signal.

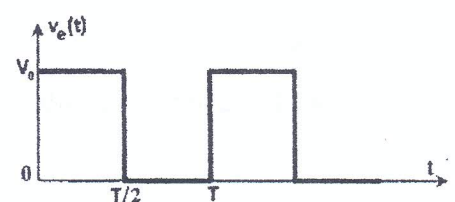


Figure 2



Exprimer les fréquences des quatre premières composantes non nulles de ce signal. Tracer alors le spectre de  $v_e(t)$  pour ces fréquences.

10. Les tensions  $v_e(t)$  et  $v_s(t)$  sont indiquées sur l'écran d'un oscilloscope (Figure 3). On constate que lorsqu'on fait varier la fréquence  $f$  de  $v_e(t)$ , l'amplitude de  $v_s(t)$  diminue.

- Base de temps : **100  $\mu$ s** par carreau
- Sensibilités des voies :  
Tension  $v_e(t)$  (en gras) : **1V** par carreau  
Tension  $v_s(t)$  : **2V** par carreau

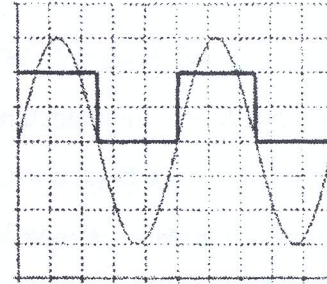


Figure 3

Déterminer graphiquement  $V_0$  et  $f$ .

Tracer le spectre de  $v_s(t)$ . Expliquer sa forme sinusoïdale.

## Problème II : Force centrale

Dans ce problème, on étudie le mouvement de la Terre dans le référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}$  centré au centre  $S$  du Soleil et supposé galiléen. La Terre est modélisée par un solide indéformable de forme sphérique que l'on assimilera ici à un point matériel de masse  $m$  situé en son centre d'inertie  $O$ . Les effets liés à la rotation de la Terre autour de son axe ne sont pas pris en compte dans ce problème. Le centre d'inertie  $O$  de la Terre se déplace dans le champ de gravitation du Soleil de masse  $M_S$  sous l'effet de la force

$$\vec{F}_{S \rightarrow O} = -\frac{G M_S m}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

$\vec{r} = \overrightarrow{SO} = r\vec{u}_r$  : étant le vecteur position du centre  $O$  de la Terre par rapport au centre  $S$  du Soleil. On néglige l'influence des autres planètes sur le mouvement de la Terre.

1. Le champ de force de l'équation (1) est-il un champ de force central ?
2. Donner la définition d'une force conservative.
3. Montrer que la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre est conservative.
4. Montrer que l'énergie potentielle  $E_p$  dont dérive cette force s'écrit :

$$E_p = -\frac{G M_S m}{r}$$

L'énergie potentielle  $E_p$  sera prise conventionnellement nulle pour  $r$  tendant vers l'infini.

5. Montrer que l'énergie mécanique  $E_m$  de la Terre est constante au cours de son mouvement autour du Soleil.
6. Définir le vecteur moment cinétique  $\vec{L}_S$  de la Terre dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , par rapport au centre  $S$  du Soleil.

7. En appliquant à la Terre le théorème du moment cinétique par rapport au point  $S$ , montrer que son moment cinétique  $\vec{L}_S$  est un vecteur constant.
8. En déduire que la trajectoire suivie par la Terre autour du Soleil est entièrement contenue dans un plan fixe  $\Pi$ . Comment est situé le plan de cette trajectoire par rapport au vecteur moment cinétique  $\vec{L}_S$ ?
9. Pour la suite, on pose :  $\vec{L}_S = mC\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire fixe dans le référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}$  et  $C$  une constante.

Dans le plan  $\Pi$  de sa trajectoire, on repère la position du centre d'inertie de la Terre  $O$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $r = SO$  et  $\theta = (\vec{SO}_0, \vec{SO})$  (Figure 4.a).  $O_0$  est la position de  $O$  à une date choisie comme origine.  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  étant la base locale associée à ces coordonnées.

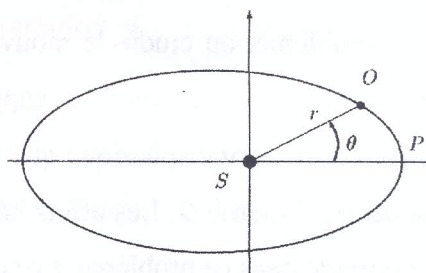
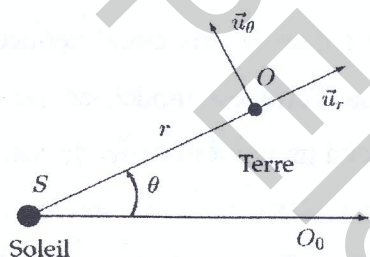


Figure 4.a Repérage de la position de la Terre. Figure 4.b Trajectoire de la Terre autour du Soleil. Montrer que la vitesse du centre d'inertie de la Terre par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$$

Donner les expressions de  $v_r$  et de  $v_\theta$  en fonction de  $r$ ,  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$  et de  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

10. Exprimer le moment cinétique  $\vec{L}_S$  en fonction de  $m$ ,  $r$  et  $\dot{\theta}$ . En déduire que la constante  $C$  est liée aux paramètres  $r$  et  $\dot{\theta}$  par la relation :

$$C = r^2 \dot{\theta}$$

11. Exprimer l'aire  $d\Sigma$ , balayée par le rayon-vecteur  $\vec{r}$  pendant une durée  $dt$  du mouvement de la Terre autour du Soleil.
12. Montrer que l'aire  $\Sigma$  balayée par le rayon-vecteur  $\vec{r}$  durant un intervalle de temps  $\Delta t$  est donnée par la loi :

$$\Sigma = \frac{C}{2} \Delta t$$

Comment appelle-t-on cette loi ?



13. Définir l'énergie cinétique  $E_c$  de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}$ . En déduire son expression en fonction de  $m$ ,  $C$ ,  $r$  et  $\dot{r}$ .

14. Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{G M_S m}{r} + \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

15. On appelle l'énergie potentielle effective le terme de l'énergie mécanique qui ne dépend que de la coordonnée de position  $r$  et on la note :

$$E_{eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{G M_S m}{r}$$

Déterminer, en fonction de  $G$ ,  $C$  et  $M_S$ , la distance  $r_0$  pour laquelle l'énergie potentielle effective est minimale. Donner alors l'expression de  $E_{eff}(r_0)$ .

16. Tracer l'allure de  $E_{eff}(r)$ .

17. Quelle est la nature de la trajectoire dans le cas où  $E_m = E_{eff}(r_0)$ .

18. Par ailleurs, avec un choix convenable de l'origine des angles polaires, on montre que l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  peut s'écrire sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2)$$

avec  $p = \frac{C^2}{G M_S}$  et  $e = p \cdot u_0$ , où  $u_0$  est une constante d'intégration qu'on ne demande pas de déterminer.

La relation (2) est l'équation polaire d'une conique d'excentricité  $e$ . On supposera que  $e < 1$  et que la trajectoire est une ellipse dont  $S$  est l'un de ses foyers (Figure 4.b).

a- Déterminer la distance  $SO$  minimale notée  $r_m$  au périhélie  $P$  de la trajectoire en fonction de  $p$  et  $e$ .

b- Déterminer la distance  $SO$  maximale notée  $r_M$  à l'aphélie  $A$  de la trajectoire en fonction de  $p$  et  $e$ .

c- Déterminer l'écart relatif entre ces deux distances défini par :  $\frac{r_M - r_m}{p}$ .

d- **Application numérique :** On donne  $p = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$  et  $e = 0,018$ . Calculer  $r_M$ ,  $r_m$  et leur écart relatif.

19. On rappelle que la surface d'une ellipse est donnée par  $\Sigma = \pi \cdot a \cdot b$ , où  $a = \frac{p}{1 - e^2}$  et  $b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$  désignant respectivement le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse.

Pour toute la suite, on utilisera les valeurs numériques de  $e$  et de  $p$  données dans la **question 18**.

- a- En utilisant la relation établie dans la question 12, montrer que la période  $T$  du mouvement de la Terre autour du Soleil est :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_S}} \left( \frac{p}{1-e^2} \right)^{3/2}$$

- b- **Application numérique** : On donne  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  et  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{kg}$ . Calculer  $T$  en jours.

20. Pour l'hémisphère nord de la Terre, le périhélie  $P$  de la trajectoire correspond approximativement au début de l'hiver (solstice d'hiver), l'aphélie  $A$  de la trajectoire correspond au début de l'été (solstice d'été), le début du printemps ou équinoxe du printemps  $EP$  correspond à  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et le début de l'automne ou équinoxe d'automne  $EA$  correspond à  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

- a- Reproduire le schéma de la trajectoire (Figure 4.b) et placer les points  $A$ ,  $EP$  et  $EA$ . Indiquer avec soin la surface balayée par le rayon-vecteur de la Terre pendant chacune des quatre saisons.
- b- Montrer graphiquement que le printemps et l'été sont plus longs que l'automne et l'hiver dans l'hémisphère nord.

### Problème III : Onde acoustique

On considère une onde sinusoïdale de longueur d'onde  $\lambda$  qui se propage en tout point  $M$  d'abscisse  $x$  à un instant  $t$ . L'onde correspondante en terme de  $p(x, t)$  s'écrit en notation complexe :

$$\bar{p}(x, t) = p_0 \exp j(\omega t - kx)$$

1. Caractériser l'onde décrite par la pression acoustique  $\bar{p}(x, t)$ .
2. Donner l'expression de  $k$  en fonction de  $\omega$  et  $c$ .
3. Par application de la relation fondamentale de la dynamique à une tranche du fluide comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , de section  $S$  et de masse élémentaire  $dm$ , établir la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{p}(x, t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial t}$$

4. Déterminer la vitesse particulière  $\bar{v}(x, t)$  en fonction de  $\bar{p}(x, t)$  et déduire qu'elle s'écrit sous la forme suivante :  $\bar{v}(x, t) = v_0 \exp j(\omega t - kx)$ . Exprimer la valeur maximale  $v_0$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $c$  et  $p_0$ .
5. Rappeler en quoi consiste l'approximation de l'acoustique.
6. Pour l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation, on définit en notation complexe l'impédance acoustique du milieu par la relation :



$$Z_c = \frac{\bar{p}(x, t)}{\bar{v}(x, t)}$$

Exprimer  $Z_c$  en fonction de  $\rho_0$  et  $c$ .

7. On considère deux fluides (1) et (2) séparés par une interface plane (de masse négligeable) perpendiculaire à l'axe  $(Ox)$  en  $x = 0$ . Les impédances acoustiques et les célérités du son dans les deux fluides prennent respectivement les valeurs  $Z_1, Z_2, c_1$  et  $c_2$  (Figure 5). On suppose qu'à l'équilibre (avant le passage de l'onde) la pression est uniforme dans les deux fluides et égale à  $P_0$ .

Dans le domaine des  $x < 0$ , une onde progressive se propage dans le fluide (1) dans le sens des  $x$  croissants, soit  $v_i(x, t) = v_1(x - c_1 t)$ .

A l'interface, cette onde donne naissance à une onde réfléchie  $v_r(x, t)$  et une onde transmise  $v_t(x, t)$ , comme indiqué sur la Figure 5.

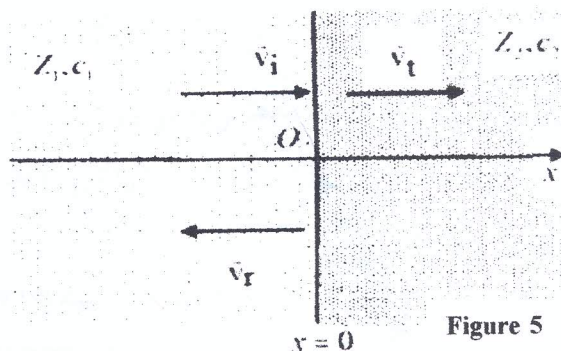


Figure 5

Ecrire l'équation de continuité des vitesses des particules du fluide de part et d'autre de l'interface ainsi que l'équation de continuité de la surpression  $p$  ?

8. On définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance acoustique de l'onde incidente à l'interface comme  $R = \frac{I_r(x=0)}{I_i(x=0)} = \left| \frac{v_r(0, t)}{v_i(0, t)} \right|^2$  et  $T = \frac{I_t(x=0)}{I_i(x=0)}$ , avec  $I_r$  l'intensité de l'onde réfléchie,  $I_i$  l'intensité de l'onde incidente et  $I_t$  l'intensité de l'onde transmise.

a- Déterminer l'expression de  $\frac{v_r(0, t)}{v_i(0, t)}$  en fonction de  $Z_1$  et de  $Z_2$ .

b- En déduire les expressions de  $R$  et  $T$  en fonction de  $x = \frac{Z_2}{Z_1}$ .

c- Représenter les variations des coefficients  $R$  et  $T$  en fonction de  $x$ . Discuter les cas ( $Z_1 = Z_2$ ) et ( $Z_1 \ll Z_2$  ou  $Z_2 \ll Z_1$ ).