



Devoir surveillé de mathématiques n° :1

Durée : 1H :30

Date : 29 Octobre 2024

Nombre de pages : 2

Questions du cours

1. Qu'est-ce qu'une tribu sur un ensemble Ω ?
2. Qu'est-ce qu'un système complet d'événements ?
3. Quelle est la définition d'une probabilité sur un espace probabilisable (Ω, T) ?

Exercice : 1

Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie remporte l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in]0, 1[$ de gagner une partie donnée, et que B a une probabilité $b \in]0, 1[$. Les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité que B gagne ?
4. En utilisant le fait que les événements " A gagne", " B gagne" et "le match est nul" est un système complet d'événements, retrouver la probabilité que B gagne.
5. À quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Exercice : 2

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_n = \ln(n!)$

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln n$
2. Montrer que $\int_1^n \ln t dt \leq u_n \leq \int_2^{n+1} \ln t dt$.
3. On pose $v_n = \int_1^n \ln t dt$, montrer que $v_n - 1 = n \ln n - n$.
4. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n}$
5. En déduire un équivalent de u_n .

Exercice : 3

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b[$ et vérifiant $f(a) \leq 0$, ainsi que

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in [a, b[$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite que l'on déterminera.



BIB-IPEIS