

Devoir de Mathématiques N°1

Exercice : (8 points)

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3 % pour l'atelier 1 et 4 % pour l'atelier 2.

On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

On considère les événements suivantes :

A_i : La pièce prélevée soit fabriquée par l'atelier i , avec $i=1$ ou 2 .

D : La pièce prélevée soit défectueuse.

N.B. Pour deux événements A et B , on note

- $\bar{A}$ l'évènement contraire de A .
- $P(A/B)$ la probabilité de A sachant B .

1. Vérifier que $P(A_1) = \frac{2}{3}$ et $P(A_2) = \frac{1}{3}$.
2. Trouver les probabilités conditionnelles suivantes : $P(D/A_1)$, $P(D/A_2)$, $P(\bar{D}/A_1)$ et $P(\bar{D}/A_2)$.
3. Déterminer $P(D \cap A_1)$ et $P(\bar{D} \cap A_2)$.
4. En utilisant la formule des probabilités totales, écrire $P(D)$ en fonction de $P(D/A_1)$, $P(A_1)$, $P(D/A_2)$ et $P(A_2)$.
5. En déduire $P(D)$.
6. Déterminer la probabilité que la pièce prélevée soit fabriquée par l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Problème : (12 points)

a désigne un réel appartenant à $]0, 1[$, A désigne la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}.$$

1. Réduction de la matrice A dans un cas particulier

Dans cette question, on suppose que : $a = \frac{5}{8}$.

- (a) Trouver le polynôme caractéristique de A .
- (b) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice A .

En déduire que cette matrice est diagonalisable.

- (c) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible.

- (d) Justifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale et donner sa valeur.

2. Réduction de la matrice A dans le cas général

On se place désormais dans le cas général, c'est-à-dire que a désigne un réel quelconque strictement compris entre 0 et 1.

- (a) Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et en déduire que A admet deux valeurs propres distinctes.
- (b) Montrer que la matrice A est diagonalisable, et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P appartenant toutes deux à $M_2(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^{-1}$.
- (c) Déterminer P^{-1} .
- (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Résolution d'une équation matricielle

On considère l'équation dans $M_2(\mathbb{R})$ dont l'inconnue est M :

$$(*) \quad M^2 = A, \quad M \in M_2(\mathbb{R}).$$

- (a) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On note N la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par : $N = P^{-1}MP$.
Montrer que : $M^2 = A \iff N^2 = D$.
- (b) Soit $N \in M_2(\mathbb{R})$ telle que : $N^2 = D$.
Montrer que : $ND = DN$. En déduire que N est diagonale.
- (c) Déterminer maintenant les matrices N appartenant à $M_2(\mathbb{R})$ telles que : $N^2 = D$. (Indication : une discussion sur la position de a par rapport à $\frac{1}{2}$ pourra intervenir.)
- (d) Écrire alors en discutant sur les valeurs de a , l'ensemble des solutions de (*).

Fin de l'énoncé