

Épreuve de Physique
(2^{ème} Année de Préparation Biologie - Géologie)

Lundi 16 Décembre 2024 de 8h30 à 11h30

DEVOIR DE SYNTHESE DU 1^{er} SEMESTRE

Exercice 1

Un milieu conducteur de forme cylindrique, de longueur ℓ de section S et de résistivité électrique ρ est le siège d'un courant électrique (Figure 1). Sous l'effet d'un champ électrique constant, une particule chargée (électron, cation, anion) de masse m et de charge q , est susceptible de se déplacer à l'intérieur de ce matériau. Ainsi, la particule chargée est soumise à une force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Les interactions de la particule chargée avec son environnement, sont modélisées par une force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule et α est une constante positive. On négligera dans la suite les forces de pesanteur.

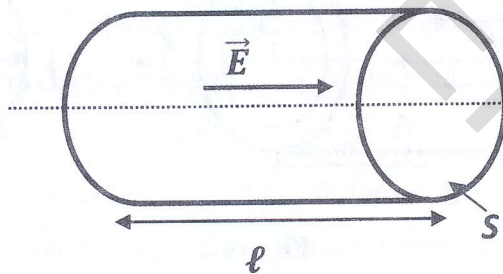


Figure 1

1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule chargée, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$.
2. Déterminer la vitesse limite $\vec{v}_\ell$ atteinte par la particule chargée en régime permanent.
3. Ce milieu conducteur est caractérisé par un nombre de particules chargées mobiles par unité de volume n . Déterminer, en régime permanent, l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j}$ en fonction de n , q , α et $\vec{E}$.
4. Donner la loi d'Ohm locale et en déduire l'expression de la résistivité électrique ρ .

On rappelle que la relation locale entre le champ électrique $\vec{E}(M)$ et le potentiel électrique $V(M)$, s'écrit $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$.

La portion du conducteur de section S et de longueur ℓ , est soumise à une différence de potentiel $U = V(z = 0) - V(z = \ell)$. Un courant électrique d'intensité I s'établit selon l'axe Oz .

5. Déterminer la résistance électrique R définie par la loi d'Ohm intégrale $U = RI$.

Les axones sont des fibres nerveuses représentant le prolongement des neurones. Ils conduisent les signaux électriques (stimuli électriques) du corps cellulaire du neurone vers les terminaisons axonales. Un axone est formé d'une membrane cylindrique constituée d'une double couche lipidique conductrice de résistivité électrique de fuite $\rho_f = 7 \times 10^6 \Omega m$ et d'épaisseur $e = 10 \text{ nm}$. La partie interne de l'axone est constituée d'un liquide conducteur appelé axoplasme, de résistivité électrique $\rho_a = 2 \Omega m$. L'axone est de rayon interne $r_a = 5 \mu m$ de longueur ℓ variant entre 1 mm et 1 m (Figure 2).

A travers l'axone, on distingue deux types de courant électrique :

- Un courant électrique axial d'intensité I_a à travers la section $S = \pi r_a^2$ de l'axoplasme.

L'axoplasme possède une résistance électrique notée R_a .

- Un courant électrique radial, dit courant de fuite, d'intensité I_f à travers la surface latérale de la membrane. L'axone est ainsi caractérisé par une résistance de fuite latérale notée R_f .

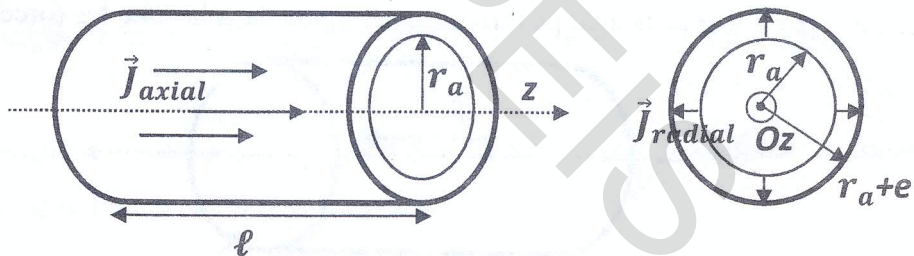


Figure 2

6. On suppose que le vecteur densité de courant électrique axial s'écrit $\vec{J}_{axial} = J_a \vec{u}_z$. Donner l'expression de la résistance électrique R_a de l'axone.

7. On suppose que le vecteur densité de courant électrique radial dans la membrane ne dépend que de r : $\vec{J}_{radial} = J_r(r) \vec{u}_r$. Montrer que l'expression de $J_r(r)$ s'écrit :

$$J_r(r) = \frac{I_f}{2\pi r \ell}$$

8. Montrer que la loi d'Ohm, s'écrit :

$$U_f = V(r_a) - V(r_a + e) = \rho_f \frac{I_f}{2\pi \ell} \ln \left(\frac{r_a + e}{r_a} \right)$$

Déduire la résistance électrique de fuite R_f de l'axone. Donner une expression simplifiée de R_f dans le cas où $e \ll r_a$.

9. Déterminer la longueur caractéristique de l'axone λ_c pour laquelle la résistance R_a est égale à R_f .

10. Quel type de conduction électrique s'effectue préférentiellement au niveau de l'axone lorsque $\ell < \lambda_c$, puis lorsque $\ell > \lambda_c$? Calculer λ_c . Conclure.

Pour plusieurs animaux, la membrane de l'axone est entourée d'une gaine de myéline qui est interrompue régulièrement par des nœuds de Ranvier (Figure 3). Dans ce cas, la résistance de fuite R_f peut prendre des valeurs plus grandes $R'_f = 200R_f$.

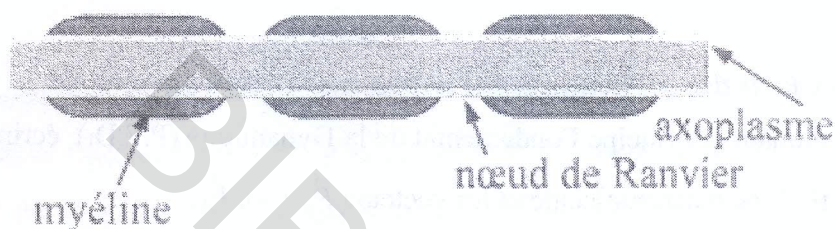


Figure 3

11. Quelle est la nouvelle valeur de la longueur caractéristique λ'_c ? La comparer avec λ_c sans myéline. Commenter.

Exercice 2

Un récipient cylindrique, de section droite d'aire S et d'axe vertical ascendant Oz (vecteur unitaire $\vec{e}_z$), contient un liquide homogène incompressible de masse volumique ρ . L'origine O est choisie au fond du récipient : $z(O) = 0$ (Figure 4).

Des macromolécules insolubles, notées M , de forme sphérique (rayon R et masse m) et de masse volumique ρ_0 (avec $\rho_0 > \rho$), sont ajoutées et mélangées au liquide. Au temps initial $t = 0$, la solution, supposée homogène, est abandonnée à elle-même : les macromolécules se déposent, à la vitesse $\vec{v}$, sous l'action des forces de pesanteur (sédimentation).

En plus de leur poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$, les particules M sont soumises à deux autres forces : une force de frottement visqueux, dite de Stokes, de la forme $\vec{F}_f = -f\vec{v}$ (avec f constante positive) et la poussée d'Archimède $\vec{F}_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \vec{e}_z$.

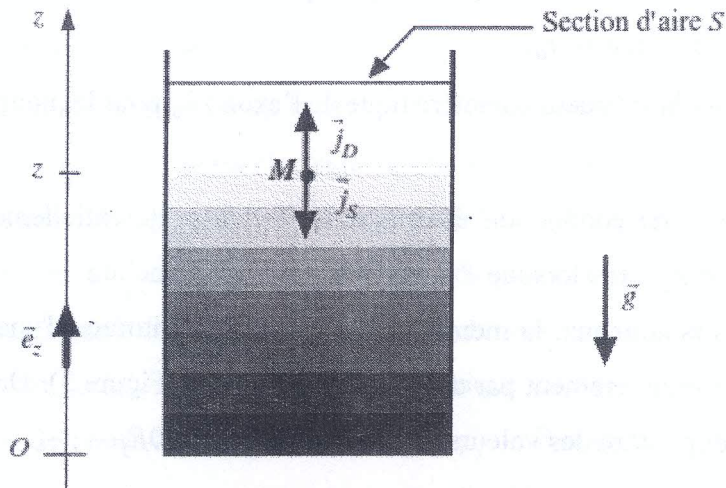


Figure 4

I. Déplacement des particules sous l'action des forces de pesanteur

1. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.), écrire la relation entre la vitesse $\vec{v}$ d'une macromolécule et les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{F}_f$ et $\vec{F}_A$.
2. Montrer que la poussée d'Archimède peut aussi s'écrire :

$$\vec{F}_A = \frac{\rho}{\rho_0} mg \vec{e}_z$$

3. Proposer une équation différentielle du mouvement d'une macromolécule, équation dans laquelle n'apparaissent que la fonction v (vitesse), la variable t et les constantes m , g , f , ρ et ρ_0 .
4. En déduire que la loi de vitesse $v(t)$ du mouvement de la macromolécule, en considérant une vitesse initiale nulle $v(t = 0) = v_0 = 0$, s'écrit :

$$v(t) = \frac{mg}{f} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{f}{m} t \right) \right]$$

5. Déterminer, en fonction de m , g , f , ρ et ρ_0 , l'expression de la valeur absolue $|v_{lim}|$ de la vitesse limite de sédimentation.
6. Soit $N^*(z)$ (particules m^{-3}), la densité volumique de particules M à la cote (ou altitude) z . En déduire, en régime de sédimentation établi (régime stationnaire), les expressions :
 - a- du nombre δN_S (positif) de particules qui traversent, en descendant, la section droite S du récipient, pendant la durée élémentaire dt :

$$\delta N_S = \frac{mgN^*(z)}{f} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) S dt$$

- b- du vecteur densité de courant particulaire $\vec{j}_S$ lié à la sédimentation.

II. Diffusion due à l'hétérogénéité de concentration

La sédimentation ayant entraîné une hétérogénéité de la solution, une diffusion unidimensionnelle et unidirectionnelle ascendante (vers le haut) apparaît, soumise à la loi de Fick, de constante de diffusion D (constante positive) et de vecteur densité de courant particulaire. En tout point M du liquide, cette loi s'écrit :

$$\vec{J}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} N^*(z) = J_D(z) \vec{e}_z$$

Soit, en régime établi, δN_D le nombre (positif) de particules qui traversent, par diffusion et en montant, la section droite S du récipient, pendant la durée élémentaire dt .

7. Rappeler la relation qui lie δN_D et $J_D(z)$

8. En déduire une relation entre δN_D et $\frac{dN^*(z)}{dz}$.

III. Équilibre

Il s'agit maintenant, en tenant compte des deux courants (de sédimentation et de diffusion), d'établir la loi $N^*(z)$ à l'équilibre.

9. Donner, en régime stationnaire et permanent, la relation entre les nombres δN_S et δN_D .

10. En déduire que l'équation différentielle qui relie N^* à la coordonnée de position z est :

$$\frac{dN^*(z)}{N^*(z)} + \frac{|v_{lim}|}{D} dz = 0$$

11. En déduire que la loi $N^*(z)$, avec $N^*(z=0) = N_0^*$, s'écrit :

$$N^*(z) = N_0^* \exp\left(-\frac{|v_{lim}|}{D} z\right)$$

12. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $N^*(z)$.

13. Un traitement statistique, selon la théorie de Boltzmann, conduirait à l'expression de la densité volumique particulaire suivante (expression qui n'est pas à redémontrer) :

$$N^*(z) = N_0^* \exp\left(-\frac{m\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)g}{k_B T} z\right)$$

avec k_B constante de Boltzmann et T température absolue. Déduire de ces résultats (11 et 13) la relation entre les grandeurs D , f , k_B et T .

14. Le coefficient f de la loi de Stokes est lié à la constante de viscosité η du liquide selon l'égalité $f = 6\pi R\eta$. Montrer que D peut s'exprimer en fonction des grandeurs k_B , R , T et η .

IV. Mesures et résultats

Des mesures optiques, à la température T , montrent qu'à la cote $z = z_1 = 4 \times 10^{-2} m$, la densité particulaire N^* vaut :

$$N^*(z) = \frac{N_0^*}{3}$$

Données :

$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$; $T = 298 \text{ K}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $\rho_0 = 1,25 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $\eta = 1 \text{ Pl}$ (avec $1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa.s}$)

15. Calculer la masse m et le rayon R des macromolécules M .

16. En déduire la valeur numérique du coefficient de diffusion D de ces particules.

Exercice 3

Le volume de contrôle $A'BCD'$ définit le système machine ouvert Σ_0 . La masse de fluide gazeux contenue dans ce volume est notée $m_0(t)$ à la date t et $m_0(t + dt)$ à la date $t + dt$. Le fluide s'écoule du réservoir de pression P_e au réservoir de pression P_s ($P_e > P_s$) : pendant la durée dt , une masse δm_e (contenue dans le volume $AA'D'D$) entre par l'ouverture de section S_e et une masse δm_s (contenue dans le volume $BB'C'C$) sort par l'ouverture de section S_s . Le système fermé Σ considéré pour cette étude occupe à l'instant t le volume $ABCD$ et à l'instant $t + dt$ le volume $A'B'C'D'$ (Figure 5). Pour les fluides entrant et sortant, u, h et V désignent respectivement l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et le volume massique. Les grandeurs d'échange massiques entre ce système et le milieu extérieur sont : le transfert thermique massique q et le travail massique utile w_u fourni à l'intérieur de la machine par des pièces mobiles.

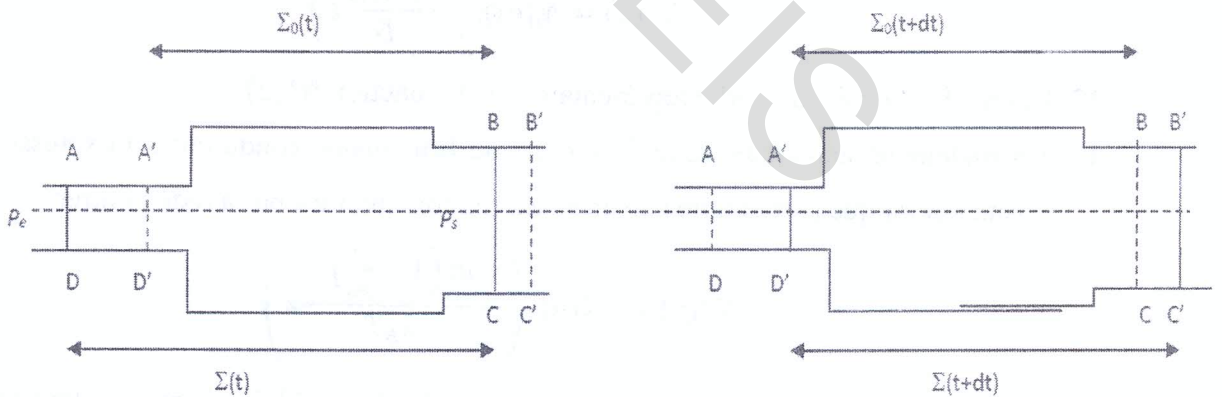


Figure 5

On suppose que le régime de fonctionnement de la machine est permanent et l'énergie potentielle associée est négligeable.

1. Établir un bilan de masse pour le système Σ entre les instants t et $t + dt$. En déduire une relation simple entre δm_e et δm_s .
2. Déterminer en fonction de P_e , P_s , V_e et V_s le travail w_p exercé par les forces de pression sur le système Σ entre les instants t et $t + dt$.

3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système Σ entre les instants t et $t + dt$,

a- Montrer que : $\left(h_s + \frac{1}{2} v_s^2 \right) - \left(h_e + \frac{1}{2} v_e^2 \right) = w_u + q$

b- Préciser la signification de chaque terme.

c- Réécrire le bilan énergétique en faisant apparaître les puissances et le débit massique D_m du fluide.