

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 2

Durée : 1h

Exercice 1 : (10 points)

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ converge.
2. A l'aide d'un changement de variables, calculer I_0 .
3. Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
4. En déduire la valeur de I_1 .
5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$, que :

$$\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

6. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 2$, que : $I_n = (n-1)a^2 I_{n-2}$.
7. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n} a^{2n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = n!2^n a^{2n+2}.$$

Exercice 2 : (10 points)

On lance une pièce de monnaie équilibrée. Les deux événements "avoir pile" et "avoir face" sont donc équiprobables (chacune des deux probabilités vaut $\frac{1}{2}$).

On répète cette expérience aléatoire jusqu'à l'apparition pour la première fois de la face "face". On note Z la variable aléatoire égale au nombre des lancés.

Si Z prend la valeur $k \in \mathbb{N}^*$, on remplit une urne par k boules numérotées de 1 à k puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Z = k) = (\frac{1}{2})^k$.
(b) Donner l'espérance et la variance de Z .
2. Montrer que la probabilité de l'événement " $X = i$ " sachant " $Z = k$ " est

$$P(X = i | Z = k) = \frac{1}{k}, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

3. Montrer que $P(X = i, Z = k) = \begin{cases} \frac{1}{k} (\frac{1}{2})^k & \text{si } 1 \leq i \leq k; \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$

4. En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}^*, P(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} (\frac{1}{2})^k$.

Fin de l'énoncé