

Devoir de synthèse de Mathématiques n°2

Durée : 2h

Problème 1 : (10 points)

Notations

- $B = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel et $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne.

Partie 1

Soit $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$. On définit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(u) = \langle z_0, u \rangle z_0.$$

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
(b) Pour $u = (x, y, z)$, exprimer $\varphi(u)$.
(c) Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.
(d) φ est-il un automorphisme ?
2. (a) Montrer que la matrice de φ dans B est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormée.
(c) Montrer que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de A sans calculer $P_A(\lambda)$.
(b) Déterminer les sous-espaces propres de A .
(c) Vérifier que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée de vecteurs propres, avec :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2), \quad u_3 = z_0.$$

- (d) Trouver P inversible et D diagonale telles que $D = {}^t P A P$ où ${}^t P$ est la transposée de la matrice P .
- (e) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_\alpha = \text{id}_{\mathbb{R}^3} + \alpha\varphi$, de matrice A_α .

- (a) Montrer que pour $\alpha \neq 0$, $\det(A_\alpha) = \alpha^3 P_A(-\alpha^{-1})$.

(b) Donner la condition sur α pour que φ_α soit un automorphisme.

(c) Établir que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.

(d) En déduire φ_α^{-1} pour $\alpha \neq -1$.
- Déterminer les α tels que $\|\varphi_\alpha(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.
- (a) Montrer que φ_{-2} est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

(b) Déterminer ses sous-espaces propres.

Problème 2 : (10 points)

Les deux parties du Problème 2 sont indépendantes.

Partie 1

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant la même loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0, 1)$ (de densité notée f et de fonction de répartition notée Φ).

On rappelle qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On pose $Z = \sup(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z , ainsi que son espérance et sa variance.

- Montrer que la fonction de répartition de Z est définie par

$$F_Z(x) = (\Phi(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- En déduire que la densité de Z est la fonction h définie par :

$$h(x) = 2f(x)\Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
4. En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
5. (a) Vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = -xf(x)$.
 (b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} xh(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

- (c) Montrer de même que :

$$\int_{-\infty}^0 xh(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx.$$

- (d) En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.
6. (a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.
 (b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z .
7. On pose $W = \min(X, Y)$. Exprimer $Z + W$ en fonction de X et Y , puis en déduire $E(W)$.

Partie 2

Dans toute la suite du problème, on suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle que la densité de X est :

$$f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

- Trouver la fonction de répartition de X .
- On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :
 - $(Y = 0) = (X < 1)$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, (Y = n) = (n \leq X < n + 1)$.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = (1 - e^{-1})e^{-n}$.
 - Montrer que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

(c) En déduire l'espérance et la variance de Y .

3. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D .

(a) Justifier : $\forall x \in]-\infty; 0[, F_D(x) = 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[, F_D(x) = 1$.

(b) Soit $x \in [0; 1[$.

Exprimer l'évènement $(D \leq x)$ à l'aide des évènements $(n \leq X \leq n + x)$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pour tout $x \in [0; 1[$, calculer $P(n \leq X \leq n + x), \forall n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrer que : $\forall x \in [0; 1[, F_D(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}}$.

(e) En déduire la densité de D .

Fin de l'énoncé