

EXAMEN DU 2^{ème} SEMESTRE (Devoir de contrôle)

Épreuve de Physique
(2^{ème} Année de Préparation Biologie - Géologie)

Vendredi 28 Février 2025 de 10h à 12h

Partie I : Mesure de débit

L'eau d'un lac s'écoule dans un canal rectiligne d'axe (Ox) à fond horizontal et à section rectangulaire de largeur L , et de grande longueur (Figure 1). L'écoulement est permanent, sa vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$ est uniforme sur toute la section droite du canal. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible.

1. La hauteur d'eau dans le canal est supposée constante, on la note H .

1.1. Rappeler la définition d'un écoulement incompressible.

1.2. Que peut-on dire concernant le champ de vitesse de l'eau ? Quelle est la grandeur qui se conserve ?

1.3. Exprimer le débit Q en fonction de v , L et H .

2. Pour mesurer le débit Q du fluide, on place dans l'eau un tube de verre coudé et gradué comme l'indique la Figure 1.

2.1. Rappeler le théorème de Bernoulli avec ses hypothèses de validité et donner son interprétation énergétique.

2.2. En appliquant ce théorème entre le point A et un point de la surface libre du fluide, exprimer le débit Q en fonction de z_0 , H , g et L . Calculer Q pour $z_0 = 15 \text{ cm}$; $H = 2 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $L = 4 \text{ m}$.

3. En réalité, la hauteur H du fluide est variable au cours de l'écoulement.

3.1. Montrer que la quantité $H_0 = H + \frac{v^2}{2g}$ reste constante.

3.2. Exprimer Q , en fonction de H_0 , g , L et H .

3.3. En considérant la variation de Q en fonction de H , déterminer la hauteur critique H_M qui correspond à un débit Q_M . Exprimer H_M , puis Q_M en fonction de H_0 . Calculer H_M pour $H_0 = 3,15 \text{ m}$.

3.4. Déterminer la vitesse v_M de l'écoulement lorsque la hauteur de l'eau dans le canal est H_M .

3.5. On distingue deux régimes d'écoulement dans le canal : le régime torrentiel lorsque la hauteur de l'eau dans le canal est $H < H_M$, et le régime fluvial qui correspond à une hauteur $H > H_M$. On donne $v_1 = 2,5 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_2 = 5 \text{ m.s}^{-1}$, deux vitesses de l'eau dans le canal. Identifier le régime d'écoulement correspondant.

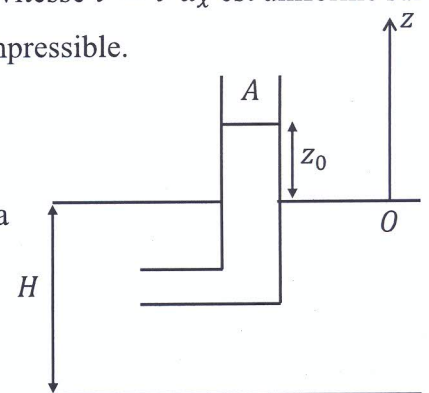


Figure 1

Partie II : Phénomène de porosité

Dans cette partie, on étudie l'infiltration de l'eau à travers la surface de base d'un barrage rempli d'eau à une hauteur H . On admet que la couche poreuse sous cette surface est constituée de n pores assimilables chacun à une conduite cylindrique horizontale de même rayon R et de longueur l_p suivant l'axe (Ox) (Figure 2).

L'eau s'écoule en régime permanent dans chaque pore.

On admet dans la suite que la pression p du fluide ne dépend que de la variable x et que la vitesse $\vec{v} = v(r) \vec{u}_x$, est uniforme suivant (Ox) . L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible de masse volumique $\rho_e = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

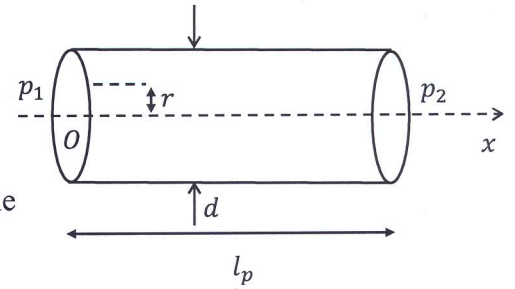


Figure 2

Cet écoulement est induit par une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$;

p_1 en $x = 0$ et p_2 en $x = l_p$.

4. L'équation différentielle régissant l'écoulement de l'eau dans un pore s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad \text{avec } \eta \text{ la viscosité dynamique de l'eau.}$$

4.1. Montrer que la pression du fluide peut s'écrire sous la forme : $p = Bx + C$ où B et C sont des constantes réelles. Exprimer Δp en fonction de l_p et B .

4.2. On donne $v(r = R) = 0$; déterminer l'expression de la vitesse du fluide et l'écrire sous la forme :

$$v(r) = -\frac{B}{4\eta} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

4.3. Déterminer la vitesse maximale v_{max} du fluide. Quel est le signe de B ? En déduire que la pression p est une fonction décroissante de x .

4.4. Exprimer v_{max} en fonction de η , l_p , Δp et du diamètre d de la conduite. Réécrire la vitesse en fonction de v_{max} et donner son allure dans la conduite.

4.5. Déterminer le débit Q_p du fluide dans un pore sous la forme :

$$Q_p = \frac{\pi}{128\eta} \frac{\Delta p}{l_p} d^4$$

5. On définit la porosité du milieu par : $\phi_p = \frac{\text{Volume total des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}}$. Soit A la section transversale de la couche poreuse sous la base du barrage. Son volume est $V = l_p A$.

5.1. Exprimer le débit volumique total Q_D par unité de surface à travers la couche poreuse.

5.2. Déduire que Q_D vérifie la loi de Darcy : $Q_D = \frac{K \Delta p}{\eta l_p}$ avec K la perméabilité du milieu poreux à exprimer en fonction de ϕ_p et d . Donner l'unité de K .

6. On admet qu'à l'entrée des pores, la pression de l'eau est uniforme et égale à celle au fond du barrage $p_1 = p_0 + \rho_e g H$, où p_0 est la pression atmosphérique. La sortie des pores est portée à la pression $p_2 = p_0$. Exprimer Q_D en fonction de K , ρ_e , g , H , η et l_p . Evaluer Q_D lorsque $K = 10^{-12} \text{ m}^2$; $H = 8 \text{ m}$; $l_p = 5 \text{ m}$ et $\eta = 10^{-3} \text{ Pl}$.

Partie III : Sédimentation des particules dans l'eau

Dans le but de fournir de l'eau potable à une habitation, un canal alimente un bac de prétraitement d'eau. Dans cette partie, on étudie la sédimentation de certaines particules dans l'eau du bac sous l'effet de la pesanteur. Pour ceci une particule animée d'une vitesse $\vec{v}$ est modélisée par une sphère de rayon R_s et de masse volumique ρ_s (Figure 3).

7. La force de frottement qu'elle subit obéit à la loi de Stokes $\vec{F} = -6 \pi \eta R_s \vec{v}$.

On note $\vec{\pi} = \rho_e g V_s \vec{u}_z$, la poussée d'Archimède de l'eau sur la particule.

7.1. Effectuer dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ le bilan des forces s'exerçant sur cette particule.

7.2. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de la particule s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \left(\frac{\rho_e}{\rho_s} - 1 \right)$$

Où τ est à exprimer en fonction de η , R_s et ρ_s . Vérifier son unité et donner sa signification physique.

7.3. Déterminer l'expression de la vitesse de la particule. On prendra $v(t=0) = 0$.

7.4. Pour des temps assez grands, le régime permanent s'établit, déduire la vitesse limite v_l de la particule en fonction de R_s , ρ_e , ρ_s , g et η .

7.5. Soit h_b la hauteur dans le bac. Calculer $|v_l|$ et la durée Δt_s de sédimentation pour les particules indiquées dans le tableau suivant : On donne $\rho_s = 2,5 \rho_e$; $h_b = 5 \text{ m}$ et $\eta = 10^{-3} \text{ Pl}$.

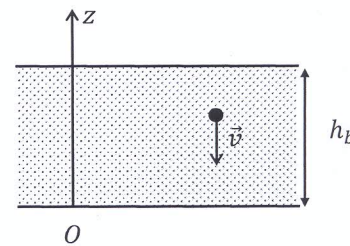


Figure 3

Particule	Sable	Sable fin	Argile 1	Argile 2
Diamètre de la particule	1 mm	100 μm	10 μm	1 μm
$ v_l $				
Δt_s				
$\mathcal{R}_e$				

8. On rappelle que le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la particule s'écrit :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho_e |v_l| R_s}{\eta}$$

8.1. Quelle est sa signification physique ?

8.2. Calculer $\mathcal{R}_e$ pour les écoulements autour des particules indiquées dans le tableau précédent. Présenter les résultats dans ce tableau.

8.3. Le modèle utilisé pour étudier la sédimentation des particules impose la condition $\mathcal{R}_e \leq 5$, commenter alors les résultats obtenus.

8.4. Le temps de sédimentation est $\Delta t_s = 120 \text{ mn}$, déterminer alors le rayon minimal $R_{s \text{ min}}$ de la particule.

Partie IV : Angle de raccordement

On considère une goutte de liquide immobile déposée sur un support solide.

9. Définir l'angle de raccordement θ du liquide en contact avec le solide.

10. Expliquer, sur un schéma, la différence entre un liquide mouillant et un liquide non mouillant.

Donner un exemple pour chaque cas.

Partie V : Loi de Jurin

En plaçant un tube capillaire dans une cuve remplie d'eau, de masse volumique ρ_e , on remarque que l'eau monte à une hauteur h et que l'interface entre l'eau et l'air est une calotte sphérique de rayon R (Figure 4).

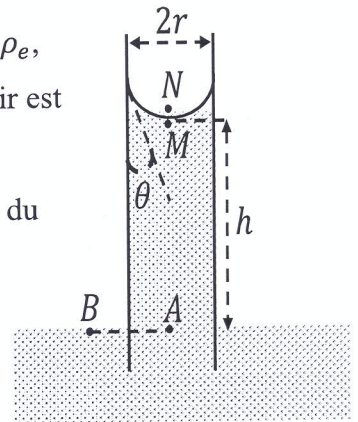


Figure 4

11. Exprimer le rayon R de l'interface entre l'eau et l'air en fonction du rayon r du tube et de l'angle de raccordement θ de l'eau avec la surface du tube.
12. En appliquant la loi de l'hydrostatique, déterminer la différence de pression entre les points M et N .
13. Montrer, alors, que la hauteur h est donnée par :

$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho_e g r}$$

14. On remplace l'eau par du mercure. Calculer la valeur de h dans un tube de verre de rayon $r = 1 \text{ mm}$.

Faire un schéma.

Données : $\theta_{\text{mercure/verre}} = 135,20$; $\rho_{\text{mercure}} = 13600 \text{ kg.m}^{-3}$; $\sigma_{\text{mercure}} = 0,5 \text{ N.m}^{-1}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$