

Épreuve de Physique
(2^{ème} Année de Préparation Biologie - Géologie)

Vendredi 09 Mai 2025 de 8h30 à 11h30

DEVOIR DE SYNTHESE DU 2^{ème} SEMESTRE

Problème 1 : Ondes acoustiques planes

On note $u(z, t)$ le déplacement, $v(z, t)$ la vitesse particulaire et $p(z, t)$ la pression acoustique d'une onde acoustique plane sinusoïdale, de fréquence f qui se propage selon l'axe Oz , avec une célérité c , dans un milieu de masse volumique $\rho(z, t) = \rho_0 + \mu(z, t)$.

I. Préliminaire

On considère une onde sinusoïdale de longueur d'onde λ qui se propage en tout point M d'abscisse z à un instant t . L'onde correspondante en terme de $p(z, t)$ s'écrit en notation complexe :

$$\bar{p}(z, t) = p_0 \exp(j(\omega t - kz))$$

1. Caractériser l'onde décrite par la pression acoustique $\bar{p}(z, t)$.
2. Donner l'expression de k en fonction de ω et c .
3. Etablir une équation reliant $\frac{\partial \bar{v}(z, t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial \bar{p}(z, t)}{\partial z}$
4. Déterminer la vitesse particulaire $\bar{v}(z, t)$ en fonction de $\bar{p}(z, t)$ et déduire qu'elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{v}(z, t) = v_0 \exp(j(\omega t - kz))$$

Exprimer la valeur maximale v_0 en fonction de ρ_0 , c et p_0 .

5. Rappeler en quoi consiste l'approximation de l'acoustique linéaire.
6. Montrer que l'approximation acoustique linéaire est vérifiée lorsque la pression acoustique $p_0 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$.

On donne pour l'air ($T = 25^\circ \text{C}$) : $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$; $c = 340 \text{ m/s}$.

7. Pour l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation, on définit en notation complexe l'impédance acoustique du milieu par la relation :

$$Z_c = \frac{\bar{p}(z, t)}{\bar{v}(z, t)}$$

7.1. Justifier cette définition en la comparant à celle définie en électricité.

7.2. Exprimer Z_c en fonction de ρ_0 et c .

7.3. Calculer la valeur de Z_c pour l'air et pour l'eau à la température 25°C . Commenter le résultat.

On donne pour l'eau ($T = 25^\circ\text{C}$) : $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$; $c = 1,490 \times 10^3 \text{ m/s}$.

7.4. Quelle sera l'expression de Z_c dans le cas d'une propagation dans le sens des $z < 0$?

II. Réflexion et transmission d'une onde acoustique

On considère deux fluides (1) et (2) séparés par une surface plane perpendiculaire à l'axe (Oz) en $z = 0$. On désigne par $Z_{c1} = \rho_1 c_1$ et $Z_{c2} = \rho_2 c_2$ leurs impédances acoustiques respectives.

Une onde incidente (OI) acoustique plane progressive monochromatique définie par $v_i(z, t) = v_{0i} \sin(\omega t + k_1 z)$ arrive en incidence normale, au niveau du plan $z = 0$. Elle donne naissance à une onde réfléchie (OR) et à une autre transmise (OT) (Figure 1).

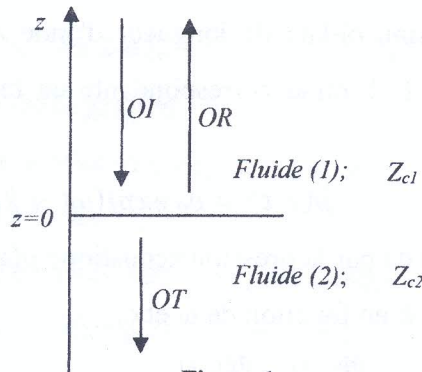


Figure 1

8. Donner les expressions de $v_r(z, t)$ de l'onde réfléchie et $v_t(z, t)$ de l'onde transmise en fonction de v_{0r} , v_{0t} , k_1 et k_2 .

9. En déduire celles de $p_i(z, t)$, $p_r(z, t)$ et $p_t(z, t)$.

10. En utilisant la conservation du débit volumique ($Q_v = S \cdot v$) et de la continuité de la surpression à l'interface séparant les deux fluides, déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en vitesse définis par :

$$r_v = \frac{v_r(z=0, t)}{v_i(z=0, t)} \quad \text{et} \quad t_v = \frac{v_t(z=0, t)}{v_i(z=0, t)}.$$

11. On définit l'intensité acoustique par la grandeur $I = \langle |p v| \rangle$.

11.1. Donner les expressions des intensités incidente, réfléchie et transmise en fonction de Z_{c1} et Z_{c2} .

11.2. Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en énergie R et T sont donnés par :

$$R = \left(\frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \right)^2 \text{ et } T = \frac{4Z_{c2}Z_{c1}}{(Z_{c2} + Z_{c1})^2}$$

11.3. Quelle relation a-t-on entre R et T ? Interpréter.

Problème 2 : Sismographe vertical

Un sismographe est un instrument scientifique utilisé pour mesurer les vibrations et les ondes sismiques générées par les tremblements de terre. Les ondes mécaniques produites par un séisme sont de différentes natures. Les ondes volumiques (ondes Primaire et Secondaire) sont les plus rapides et ont des fréquences qui varient entre 0,2 et 10 Hz. A l'inverse, les ondes surfaciques (ondes de Love et de Rayleigh) sont les plus lentes mais les plus dévastatrices, avec des fréquences allant de 2 mHz à 0,2 Hz.

Le sismographe étudié dans cette partie est constitué d'un bâti rigide de hauteur h , solidaire au sol, auquel est suspendue une masse m par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide L_0 et d'un amortisseur de coefficient de frottement λ (Figure 2).

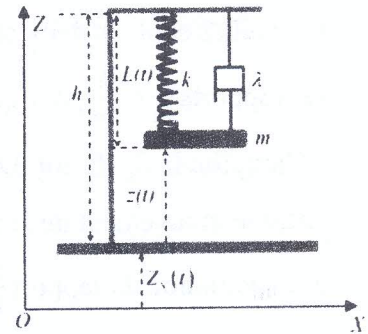


Figure 2

Lorsqu'une onde sismique traverse le sol, elle déclenche un mouvement de vibration vertical de la masse m . Une secousse sismique sinusoïdale de pulsation ω crée un mouvement vertical du sol repéré par la cote $Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ dans un référentiel $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ supposé galiléen, ce qui déclenche un mouvement de la masse m par rapport au sol, caractérisé par la fonction $z(t)$.

A un instant t , le ressort a pour longueur $L(t)$. L'amortisseur exerce sur la masse m une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\lambda \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z$.

1. Déterminer, en l'absence de secousse sismique, la longueur du ressort à l'équilibre L_{eq} en fonction de L_0 , k , m et g . En déduire la cote de la masse z_{eq} repérée par rapport au bâti.

On note $u(t) = z(t) - z_{eq}$ l'écart par rapport à la position d'équilibre de la masse m .

2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ lors d'une secousse sismique s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega^2 Z_s(t)$$

Où ω_0 et Q sont deux constantes à exprimer en fonction de k , m et λ . Donner les significations physiques et les dimensions de ces deux grandeurs.

3. On se place en régime permanent sinusoïdal et on utilise la notation complexe :

$$\bar{u} = U_0 \exp(j(\omega t + \varphi)) \quad \text{avec } j^2 = -1$$

Écrire l'équation du mouvement de la masse m en notation complexe. En déduire l'expression de la fonction de transfert du sismographe $\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{u}}{\bar{z}_s}$.

4. Quelle est la nature du filtre qui décrit le comportement du sismographe ? Justifier votre réponse.

5. Montrer que l'expression de l'amplitude maximale U_0 de la réponse verticale $u(t)$ est donnée par :

$$U_0 = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} Z_0 \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

6. Quelles sont les deux conditions portant sur la fréquence et les rapports $\frac{k}{m}$ et $\frac{\lambda}{m}$ pour que l'amplitude maximale U_0 soit égale à l'amplitude Z_0 du sol. Déterminer dans ce cas le déphasage entre le mouvement de la masse m et celui du sol.

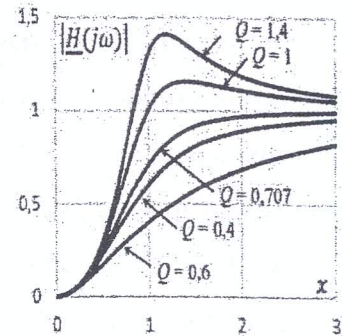


Figure 3

7. La variation du rapport $\frac{U_0}{Z_0}$ soit en fonction de x est représentée sur la Figure 3 pour différentes valeurs de Q .

Les sismologues choisissent un facteur Q égal à 0,707. Justifier le choix de cette valeur.

Filtrage du signal de sortie du sismographe

La vibration de la masse m est amplifiée et enregistrée par un mécanisme de mesure ou un transducteur.

Afin de supprimer les parasites de hautes fréquences du signal en sortie du sismographe, on utilise un filtre passif constitué par un circuit RLC série (Figure 4).

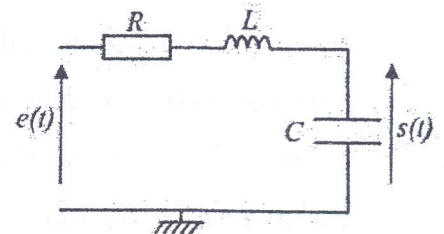


Figure 4

Les signaux d'entrée et de sortie s'écrivent respectivement en notation complexe : $\bar{e}(t) = E_0 \exp(j\omega t)$ et $\bar{s}(t) = S_0 \exp(j\omega t + \varphi)$.

8. Donner les circuits équivalents en hautes et basses fréquences. En déduire la nature du filtre.

9. Montrer que le signal $\bar{s}(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \bar{s}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d \bar{s}(t)}{dt} + \omega_0^2 \bar{s}(t) = \omega_0^2 \bar{e}(t)$$

Où ω_0 et Q sont deux constantes à exprimer en fonction de R , L et C .

10. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit sous la forme :

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{s}(t)}{\bar{e}(t)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Quel est l'ordre de ce filtre ?

11. Exprimer le module de la fonction de transfert de ce filtre en fonction de ω , ω_0 et Q .
12. Déterminer l'expression du Gain en décibels G_{dB} . Donner les équations des asymptotes de G_{dB} aux basses et aux hautes fréquences et préciser les pentes de ces asymptotes.
13. Sachant que la valeur maximale de G_{dB} est nulle pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, définir et déterminer la pulsation de coupure ω_c du filtre dans ce cas. Montrer en particulier que $\omega_c = \omega_0$ pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
14. Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 1,4$.

Problème 3 : Forces centrales

Dans ce problème, on étudie le mouvement de la Terre dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}$, centré en O , centre du Soleil, supposé galiléen.

I. Propriétés générales du mouvement

I.1. La Terre est assimilée à un point matériel de masse m centré en N . Les effets liés à la rotation de la Terre autour de son axe ne sont pas pris en compte dans ce problème. Le centre N de la Terre se déplace dans le champ de gravitation du Soleil de masse M_S sous l'effet de la force :

$$\vec{F} = -\frac{G M_S m}{r^2} \vec{u}_r$$

$\overrightarrow{ON} = r\vec{u}_r$; $\overrightarrow{ON}$ étant le vecteur position de la Terre par rapport au centre O du Soleil et $\vec{u}_r$ un vecteur de la base des coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On néglige l'influence des autres planètes sur le mouvement de la Terre.

- I.1.1. La force de gravitation $\vec{F}$ est-elle centrale ? Justifier votre réponse.
- I.1.2. Montrer que la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par le Soleil sur la Terre est conservative.
- I.1.3. Montrer que l'énergie potentielle E_p dont dérive cette force s'écrit :

$$E_p = -\frac{G M_S m}{r}$$

L'énergie potentielle E_p sera prise conventionnellement nulle pour r tendant vers l'infini.

I.1.4. Montrer que l'énergie mécanique E_m de la Terre est constante au cours de son mouvement autour du Soleil.

I.2. Moment cinétique

- I.2.1. Définir le vecteur moment cinétique $\vec{L}_O$ de la Terre dans le référentiel $\mathcal{R}$, par rapport au point O du Soleil.
- I.2.2. Énoncer le théorème du moment cinétique pour un point matériel.
- I.2.3. En appliquant à la Terre le théorème du moment cinétique par rapport au point O , montrer

que son moment cinétique $\vec{L}_O$ est un vecteur constant. En déduire que la trajectoire suivie par la Terre autour du Soleil est entièrement contenue dans un plan fixe Π . Commenter.

I.2.4. Dans la suite, on pose : $\vec{L}_O = mC\vec{k}$ où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire fixe dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}$ et C une constante.

Dans le plan Π de sa trajectoire, on repère la position du centre d'inertie de la Terre N par coordonnées polaires (r, θ) définies par $r = ON$ et $\theta = (\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON})$ (Figure 5.a).

ON_0 est la position de N à une date choisie comme origine.

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ étant les vecteurs de la base des coordonnées polaire.

a. La vitesse du centre d'inertie de la Terre par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$$

Donner les expressions de v_r et de v_θ en fonction de r , $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

b. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O$ en fonction de m , r et $\dot{\theta}$. En déduire que la constante C , s'écrit $C = r^2 \dot{\theta}$.

I.3. Loi des aires

I.3.1. Exprimer l'aire dS , balayée par le vecteur position $\vec{r}$ pendant une durée dt du mouvement de la Terre autour du Soleil.

I.3.2. Montrer que l'aire S balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$, durant un intervalle de temps Δt est donnée par la loi : $S = \frac{C}{2} \Delta t$. Comment appelle-on cette loi ?

II. Etude de la trajectoire

On pose $u = \frac{1}{r}$ et on rappelle que : $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$

II.1. Exprimer $\frac{dr}{dt}$ en fonction de C et $\frac{du}{d\theta}$.

II.2. Définir l'énergie cinétique E_c de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique $\mathcal{R}$. En déduire son expression en fonction de m , C , u et $\frac{du}{d\theta}$.

II.3. Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) - G M_S m u$$

II.4. Montrer que la conservation l'énergie mécanique le long de la trajectoire se traduit par deux équations différentielles possibles relatives à $u(\theta)$. On explicitera ces deux équations.

II.5. L'une des deux équations précédentes s'écrit : $\frac{du}{d\theta} = 0$. Quelle est la nature de la trajectoire dans ce cas ?

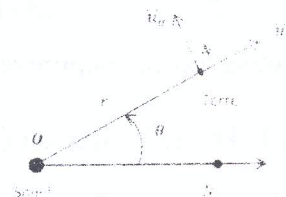


Figure 5.a

II.6.1. La deuxième équation différentielle possède comme solution :

$$u(\theta) = u_0 \cos(\theta + \varphi) + \frac{G M_S}{C^2}$$

Par un choix convenable de l'origine des angles polaires, montrer que la solution de la deuxième équation peut s'écrire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec $p = \frac{C^2}{G M_S}$ et $e = p \cdot u_0$, où u_0 est une constante d'intégration qu'on ne demande pas de déterminer. Cette relation est l'équation polaire d'une conique d'excentricité e .

II.6.2. On supposera que $e < 1$ et que la trajectoire est une ellipse dont le soleil O occupe l'un des foyers (Figure 5.b).

Déterminer la distance ON minimale notée r_p , au périhélie P de la trajectoire en fonction de p et e .

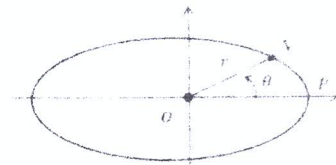


Figure 5.b

II.6.3. Déterminer la distance ON maximale notée r_A à l'apogée A de la trajectoire en fonction de p et e .

II.6.4. Déterminer l'écart relatif entre ces deux distances défini par :

$$\frac{r_A - r_P}{p}$$

II.6.5. **Application numérique :** On donne $p = 150 \times 10^6 km$ et $e = 0,018$. Calculer r_A , r_P et leur écart relatif.

III. Période temporelle du mouvement

On rappelle que la surface d'une ellipse est donnée par $S = \pi \cdot a \cdot b$, où $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ désignant respectivement le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse.

Pour toute la suite, on utilisera les valeurs numériques de e et de p données dans la question

II.6.5.

III.1. En utilisant la relation établie en I.3.2, montrer que la période T du mouvement de la Terre autour du Soleil est :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G M_S}} \left(\frac{p}{1 - e^2} \right)^{3/2}$$

III.2. **Application numérique :** On donne $G = 6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$ et $M_S = 1,99 \times 10^{30} kg$. Calculer T en jours.

III.3. Pour l'hémisphère nord de la Terre :

- l'apogée A de la trajectoire correspond au début de l'été (solstice d'été),

- le début du printemps ou équinoxe du printemps EP correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et le début de l'automne ou équinoxe d'automne EA correspond à $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Reproduire le schéma de la trajectoire (Figure 5.b) et placer les points P , A , EP et EA . Indiquer avec soin la surface balayée par le rayon-vecteur de la Terre pendant chacune des quatre saisons.