

Université de Sfax Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax	Examen N°1	AU : 2025-2026
		Section : B.G.2
	EPREUVE : MATHÉMATIQUES	DURÉE : 2 H

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$



1. a- Calculer le polynôme caractéristique de A
b- Déterminer les valeurs propres de A
c- La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous espaces propres de A. (On classera les valeurs propres par ordre croissant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et on choisira la dernière composante égale à 1 pour les vecteurs propres associés).
3. a- Déterminer une matrice inversible P telle que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

b- Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. a- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$
b- Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.
c- Déterminer les suites réels x_n , y_n , z_n qui vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - y_n + 4z_n \end{cases}$$

et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

1. Soit $x \geq 0$
 - a- Calculer $I_0(x)$
 - b- En déduire que J_0 est une intégrale convergente et calculer sa valeur.
 - c- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$
2. a- Déduire des questions précédentes que J_n est convergente.
(On pourra effectuer une récurrence)
 - b- Quelle relation qui lie J_{n+1} et J_n ?
 - c- En déduire la valeur de J_n en fonction de n
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par un changement de variable, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-2t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.