
Devoir de contrôle n. 2

Durée: 1 heure - 30 mn

EXERCICE

- 1) Déterminer la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dont la somme $S(x)$ est solution de l'équation

$$2xy'' + y' - y = 0 \quad \text{telle que} \quad y(0) = 1$$

- 2) Exprimer la solution trouvée à l'aide des fonctions usuelles.
(On distingue les deux cas: $x > 0$ et $x < 0$)
-

PROBLEME

On s'intéresse dans ce problème aux propriétés de la fonction polylogarithme, définie comme série entière et à son prolongement grâce à une représentation intégrale.

Dans ce problème, α désigne un réel et on considère la fonction

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Partie I.

- 1) Montrer que L_α est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
- 2) Déterminer le domaine de définition D_α de la fonction L_α .
(On pourra distinguer les cas $\alpha > 1$ et $\alpha \leq 1$)
- 3) Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2)$$

- 4) On suppose dans cette question que $\alpha \leq 1$.
 - a) Déterminer les deux fonctions L_0 et L_1 .
 - b) En déduire par une minoration que $\lim_{x \rightarrow 1^-} L_\alpha(x) = +\infty$.
- 5) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} L_\alpha(x)$ pour $\alpha > 1$.

Partie II.

Dans toute cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1 ($\alpha > 1$). On définit alors $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ et on pose

$$K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du.$$

- 1) Montrer que la fonction $\varphi : u \rightarrow \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- 2) En déduire que K_α est définie continue sur le fermé $] - \infty, 1]$.
- 3) Montrer que K_α est de classe C^1 sur l'ouvert $] - \infty, 1[$.
- 4) Soit $u > 0$. Déterminer la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\frac{1}{e^u - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- 5) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$x \cdot K_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \cdot L_\alpha(x).$$

- 6) Application: Déduire de ce qui précède que la fonction F_α définie sur $] - \infty, 1[$ par:

$$F_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} du$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

- 7) On prolonge L_α sur $] - \infty, 1]$ par

$$\forall x \leq 1, \quad L_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot u^{\alpha-1}}{e^u - x} du.$$

Vérifier que L_α est continue sur $] - \infty, 1]$ et de classe C^1 sur $] - \infty, 1[$.