

Examen de fin du semestre 2

Systèmes Techniques Automatisés

Le sujet comporte deux parties indépendantes :

- Partie A : Mécanique des solides indéformables
- Partie B : Automatique

Partie A : Étude du système chariot & mécanisme de coupe

On s'intéresse à une unité de coupe permettant le découpage de produits semi-finis sous forme de brique. Elle comprend essentiellement un chariot dont la translation doit être synchronisée avec la vitesse de défilement des produits et un mécanisme de coupe monté sur le chariot pour effectuer l'opération de coupe à l'aide d'une fraise-scie.

La figure 1 présente le schéma cinématique minimal de l'unité de coupe. Elle est composée des éléments suivants :

- un bâti fixe (0) ;
- un pignon (1) en liaison pivot d'axe $(O', \vec{x})$ avec le bâti (0) ;
- un chariot (2) en liaison glissière d'axe $(G, \vec{z})$ avec le bâti (0), ce chariot est entraîné en translation par l'intermédiaire d'un système pignon-crémaillère ;
- une tige homogène (3) de longueur l , en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ avec le chariot (2) au point A ;
- un vérin à double effet (4, 5) de masse négligeable, en liaisons rotules parfaites d'une part avec la tige (3) en H et d'autre part avec le chariot (2) en D ;
- un moto-réducteur (6, 7) dont le carter (6) est solidaire à la tige (3) ;
- une fraise-scie (7), en liaison pivot parfaite d'axe $(E, \vec{z})$ avec le carter du moto-réducteur (6).

REPÈRES ET PARAMÉTRAGE

On définit les repères orthonormés directs suivant :

- $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, repère orthonormé direct Galiléen lié au bâti (0) ;
- $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$, repère lié au chariot (2) avec $\vec{x}_2 = \vec{x}$, $\vec{y}_2 = \vec{y}$;
- $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$, repère lié à la tige (3) avec $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_3)$;

— $R_4(D, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$, repère lié au cylindre du vérin (4), avec $\psi = (\vec{x}, \vec{x}_4)$;

— $R_7(E, \vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z})$, repère lié à la fraise-scie (7), avec $\varphi = (\vec{x}_3, \vec{x}_7)$.

Les données géométriques du mécanisme sont comme suit :

$$\vec{OG} = z(t)\vec{z}, \vec{GA} = b\vec{y}, \vec{AB} = \frac{l}{2}\vec{x}_3, \vec{AH} = l\vec{x}_3, \vec{BE} = e\vec{z}, \vec{AD} = c\vec{x}, \vec{OI} = -a\vec{y}, \vec{DH} = \lambda(t)\vec{x}_4$$

Les paramètres b, l, e, c et a sont des constantes positives, z, λ, θ, ψ et φ sont des variables en fonction du temps.

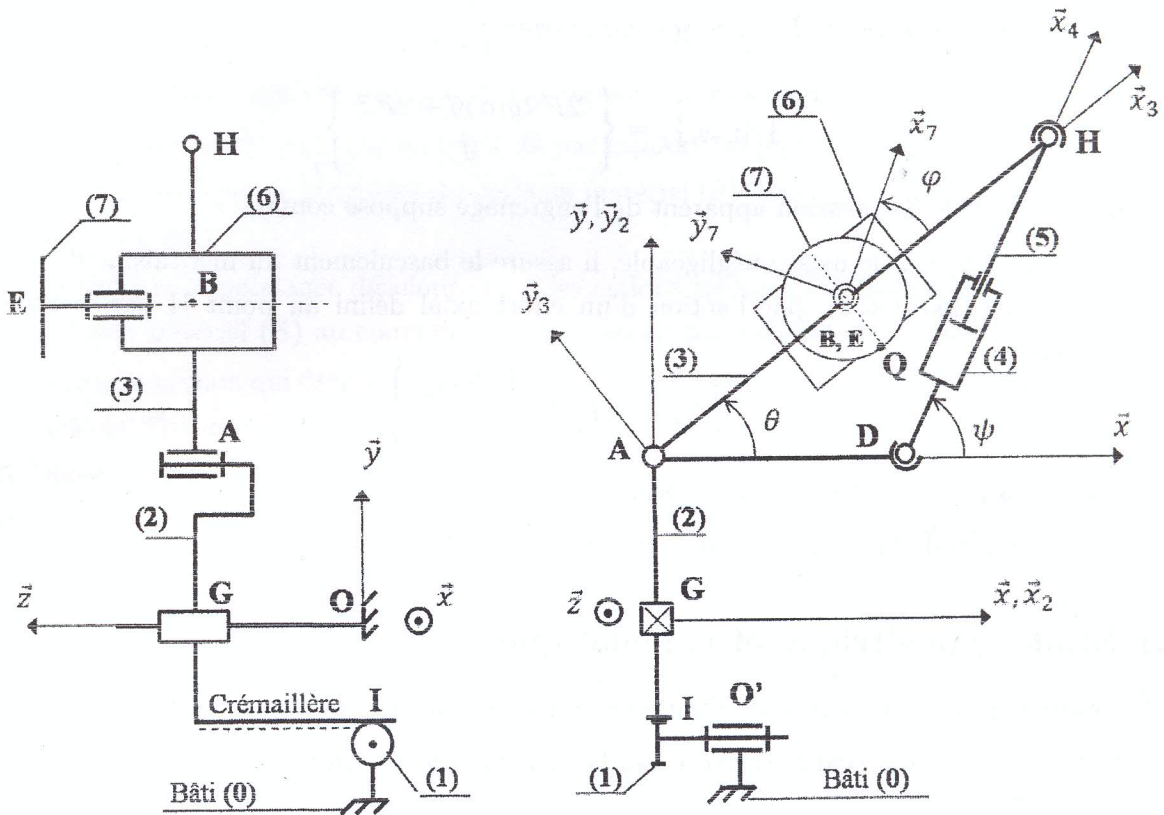


FIGURE 1 – Schéma cinématique minimal du chariot et du mécanisme de coupe

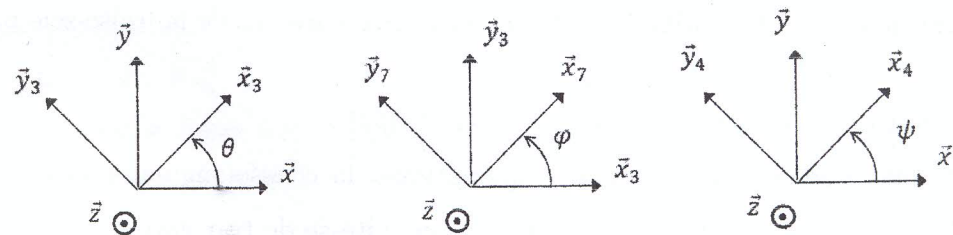


FIGURE 2 – Paramètres d'orientation des bases liées aux différents solides

DONNÉES ET HYPOTHÈSES

- le système chariot-crémaillère est de masse m_2 et de centre de masse G ;
- la tige (3) est supposée homogène de longueur l , de masse m_3 , de centre de masse B et de moment principal d'inertie I_3 par rapport à l'axe $(B, \vec{z})$;

- la fraise-scie (7) est assimilée à un disque homogène de masse m_7 , de rayon r , de centre de masse E et de moment principal d'inertie I_7 par rapport à l'axe $(E, \vec{z})$;
 - le carter du moto-réducteur (6) est de masse m_6 , de centre de masse B et de moment principal d'inertie I_6 par rapport à l'axe $(B, \vec{z})$.
- Les éléments tournants du moto-réducteur sont de masses négligeables.
- l'action de contact exercée par le pignon arbré (1) sur la crémaillère solidaire au chariot (2), est définie au point I par le torseur suivant :

$$\{\tau_{(1 \rightarrow 2)}\}_I = \begin{Bmatrix} 2F \operatorname{tg}(\alpha) \vec{y} + 2F \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$

α étant l'angle de pression apparent de l'engrenage supposé connu,

- le vérin (4,5) est de masse négligeable, il assure le basculement du mécanisme de coupe autour de l'axe $(A, \vec{z})$, par l'action d'un effort axial défini au point H par le torseur suivant :
- $$\{\tau_{(\bar{F}_V \rightarrow 5)}\}_H = \begin{Bmatrix} F_V \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H$$
- toutes les liaisons sont supposées parfaites;
 - l'accélération de la pesanteur est défini par : $\vec{g} = -g\vec{y}$.

A.1 Étude géométrique et cinématique

- A-1-1** Tracer le graphe de liaison de l'unité de coupe. En déduire la nature de la chaîne.
- A-1-2** Écrire les équations scalaires traduisant la fermeture géométrique de la chaîne cinématique $\{2-3-(4,5)-2\}$.
- A-1-3** Exprimer θ en fonction de λ . En déduire l'expression de vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
On donne : $(\arccos(f))' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
- A-1-4** La condition de coupe optimale exige que la vitesse d'avance de la fraise-scie par rapport au chariot est constante.
- Déterminer la vitesse d'avance : $\|\vec{V}(B \in 3/2)\|$.
 - Vérifier que dans le cas d'une coupe optimale la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante.
 - Vérifier cette condition de coupe pour une vitesse de translation de vérin uniforme ($\dot{\lambda} = \text{cst}$). Justifier.
- A-1-5** Déterminer le torseur cinématique :
- du chariot (2) au point G par rapport au repère R ,
 - de la tige (3) au point B par rapport au repère R ,
 - de la fraise-scie (7) au point E par rapport au repère R .
- A-1-6** Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(H \in 5/R)$ en fonction de λ , ψ et $\dot{z}$.

A.2 Etude énergétique

On se propose d'étudier le système matériel $(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de masse totale M par rapport au repère galiléen R , lors de la translation du chariot et du basculement de la tige avant que la fraise-scie se met en contact avec le profilé à découper.

A-2-1 Déterminer le torseur cinétique :

- a) du chariot (2) au point G par rapport au repère R ,
- b) de la tige (3) au point B par rapport au repère R ,
- c) de la fraise-scie (7) au point E par rapport au repère R ,
- d) du moto-réducteur (6) au point B par rapport au repère R .

A-2-2 Déterminer l'énergie cinétique du système matériel (S) dans son mouvement par rapport au repère R .

A-2-3 Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures exercées sur le système matériel (S) au cours de son mouvement par rapport au repère R .

A-2-4 Écrire l'équation qui découle de l'application du théorème de l'énergie cinétique au système matériel (S) au cours de son mouvement par rapport au repère R .

A-2-5 Déterminer l'expression de l'effort F lors de la translation du chariot uniquement.

A-2-6 Déterminer l'expression de l'effort F_V lors du basculement de la tige uniquement.

A.3 Etude dynamique

On se propose d'étudier le système matériel $(S_1) = \{3, 6, 7\}$ pendant la phase de coupe. L'objectif est de déterminer les efforts de coupe.

Durant cette phase, on impose les conditions suivantes :

- le chariot (2) est au repos par rapport à R ($\dot{z} = 0$),
- la fraise-scie tourne à une vitesse angulaire constante par rapport à la tige ($\dot{\varphi} = cst$),
- la vitesse d'avance de la fraise-scie par rapport au chariot est constante ($\dot{\theta} = cst$),
- le produit à découper exerce sur la fraise-scie un effort $\vec{F}_C = F_t \vec{x}_3 + F_r \vec{y}_3$ au point de contact Q tel que $\vec{EQ} = -r \vec{y}_3$,
- la fraise-scie est soumise à un couple moteur supposé constante $\vec{C}_M = -C_M \vec{z}$.
- l'action mécanique exercée par le vérin (5) sur la tige (3), est défini au point H par le torseur suivant :

$$\{\tau_{(5 \rightarrow 3)}\}_H = \left\{ \begin{array}{c} F_V \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H$$

A-3-1 Exprimer le torseur de l'effort $\vec{F}_C$ au point E : $\{\tau_{(\vec{F}_C \rightarrow 7)}\}_E$.

A-3-2 En appliquant le théorème du moment dynamique au point E par rapport à R , à la fraise-scie (7) seule, exprimer la composante F_t en fonction du couple moteur C_M .

A-3-3 Exprimer les torseurs de toutes les actions extérieures exercées sur (S_1) au point A .

A-3-4 En appliquant le théorème du moment dynamique au solide (S_1) par rapport à R au point A , déterminer l'expression de la composante F_r .

Partie B : Automatique

Le système hydraulique, assurant le mouvement de déplacement horizontal de l'unité de perçage, est constitué d'une servovalve proportionnelle électro-hydraulique à 3 étages et d'un vérin double effet symétrique (figure 1). La servovalve est commandée par un solénoïde de résistance R et d'inductance L .

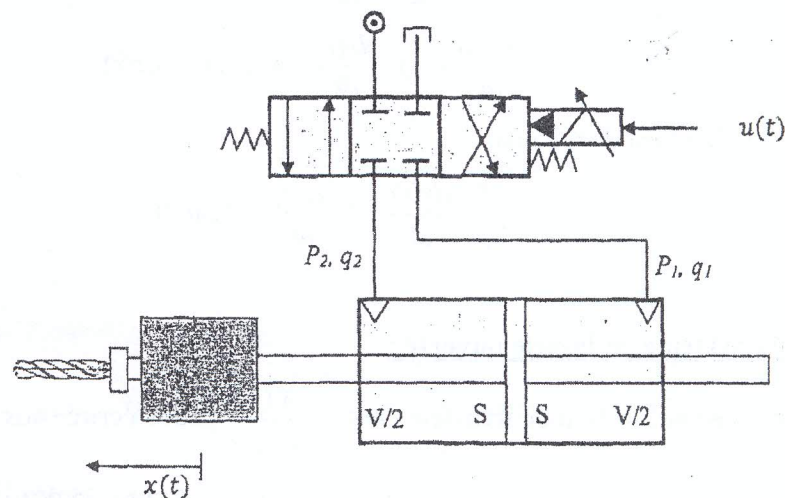


Figure 1 : Schéma de principe du système hydraulique

Liste des paramètres :

Abréviation	Désignation
m_c	Masse équivalente de l'unité de perçage
f_c	Coefficient de frottement visqueux du vérin
k_c	Raideur du vérin hydraulique
S	Section utile du piston du vérin
V	Volume du vérin double effet symétrique
B	Coefficient de compressibilité du fluide
K_d	Gain statique de la servovalve
P_1, P_2	Pression dans les chambres 1 et 2 du vérin
q_1, q_2	Débits des fluides alimentant les chambres 1 et 2 du vérin
$u(t)$	Tension d'alimentation du solénoïde
$x(t)$	Déplacement de l'unité de perçage

Pour une commande positive de tension $u(t)$, une force créée par le solénoïde permet le déplacement du tiroir, ce qui produit l'augmentation de la pression P_1 dans la chambre 1 du vérin et la diminution de la pression P_2 dans la chambre 2. Par conséquent, la différence de pression $z = P_1 - P_2$ génère un déplacement horizontal du piston du vérin entraînant l'unité de perçage de masse m_c . Les débits q_1 et q_2 sont identiques ($q_1 = q_2 = q$) puisque le vérin est symétrique. Ainsi, les équations régissant le fonctionnement du système hydraulique sont les suivantes :

L'équation du mouvement de l'unité de perçage de masse m_c est donnée par :

$$m_c \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f_c \frac{dx(t)}{dt} + k_c x(t) = S \cdot z(t)$$

L'équation du débit est donnée par :

$$\frac{V}{2\beta} \frac{dz(t)}{dt} + S \frac{dx(t)}{dt} = k_d u(t)$$

1. Etude du système en boucle ouverte :

1.1. Montrer que la fonction de transfert $G(p) = \frac{X(p)}{U(p)}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$G(p) = \frac{b_0}{p(p^2 + a_1 p + a_0)} \text{ avec : } b_0 = \frac{2\beta S k_d}{V m_c}, \quad a_1 = \frac{f_c}{m_c}, \quad a_0 = \frac{V k_c + 2\beta S^2}{V m_c}$$

1.2. Sachant que la vitesse $\omega(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ et $\Omega(p)$ est la transformée de Laplace de $\omega(t)$.

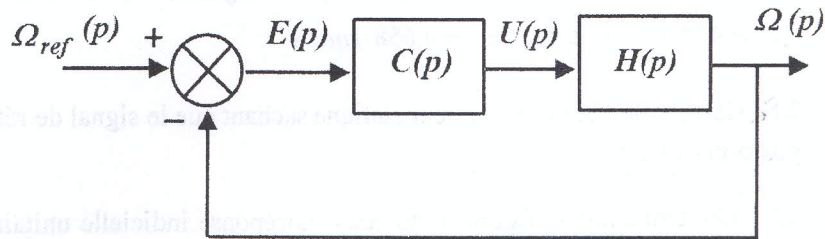
Donner l'expression de la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$. Exprimer, par identification

avec la forme canonique standard d'un système de second ordre $\frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$, le gain statique k , le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre non amortie ω_0 du système en boucle ouverte en fonction de a_1 , a_0 et b_0 .

1.3. Dans la suite du problème, on prend $a_1 = 0.5922$, $a_0 = 0.433$ et $b_0 = 0.2165$. Donner les valeurs de ω_0 , ξ et k . Donner les expressions et calculer les valeurs de temps de pic (T_{pic}) et l'amplitude du premier dépassement ($D_1\%$) et du temps de réponse à 5% (t_r).

2. Etude du système en boucle fermée :

Dans la suite du problème, on s'intéresse à l'asservissement de la vitesse du vérin. Le schéma en boucle fermée est décrit par la figure suivante. La fonction de transfert du régulateur est $C(p)$. La transformée de Laplace du signal de référence (ou consigne) est notée par $\Omega_{ref}(p)$.



1^{er} cas – Régulateur Proportionnel (P) : $C(p) = k_r$; $k_r > 0$

2.1. Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_{ref}(p)}$ et

exprimer, par identification avec la forme canonique standard d'un système du second ordre

$\frac{k_{BF}\omega_{0BF}^2}{p^2 + 2\xi_{BF}\omega_{0BF}p + \omega_{0BF}^2}$, le gain statique k_{BF} , le coefficient d'amortissement ξ_{BF} et la

pulsation propre non amortie ω_{0BF} du système en boucle fermée en fonction de k_r , a_1 , a_0 et b_0 .

2.2. En analysant les expressions analytiques des coefficients d'amortissement ξ et ξ_{BF} , conclure sur le dépassement assuré par le régulateur proportionnel en termes d'augmentation ou de diminution.

2.3. Sachant que le signal de référence est un échelon de position unitaire, donner l'expression de l'erreur statique (e_s).

2.4. Calculer les valeurs du premier dépassement ($D_1\%$), de temps de pic (T_{pic}), du temps de réponse à 5% (t_r) et de l'erreur statique (e_s) assurées par le régulateur proportionnel lorsque $k_r = 30$.

2^{ème} cas – Régulateur Proportionnel Intégral (PI) : $C(p) = k_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

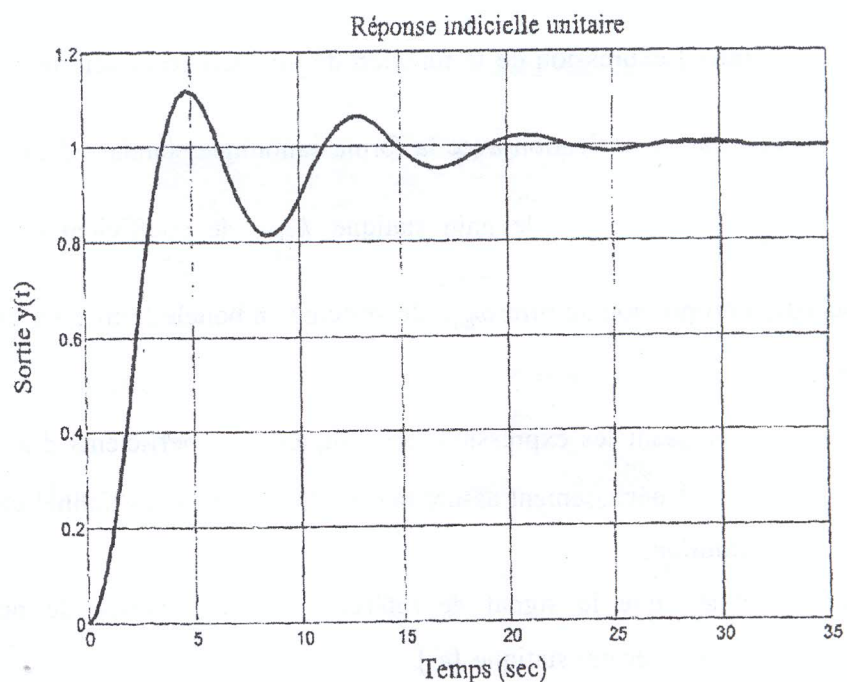
2.5. Donner l'expression de $H(j\omega)$. En déduire les valeurs de la phase φ_H (en degré) et du gain G_H (en décibel dB) de la fonction $H(j\omega)$ pour la pulsation $\omega_0 = 0.658 \text{ rad/s}$

2.6. Donner l'expression de $C(j\omega)$. En déduire les valeurs de la phase φ_C (en degré) et du gain G_C (en décibel dB) du régulateur PI.

2.7. Calculer les paramètres k_r et T_i du régulateur pour obtenir une marge de phase $M_\varphi = 45^\circ$ à la pulsation $\omega_0 = 0.658 \text{ rad/s}$

2.8. Calculer la valeur de l'erreur statique sachant que le signal de référence est un échelon de position unitaire.

2.9. On donne sur la figure ci-dessous la réponse indicielle unitaire du système en boucle fermée obtenue avec le régulateur de type PI. Déterminer, à partir de cette réponse les valeurs du premier dépassement ($D_1\%$), de temps de pic (T_{pic}), du temps de réponse à 5% (t_r).



2.10. Comparer les performances des deux régulateurs (P et PI).