
Devoir de synthèse n. 2

Durée: 4 heures

Problème 1.

Soit S une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On donne les probabilités conditionnelles suivantes où $p \in]0, 1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k / S = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{si } n \geq k \quad \text{et nulle sinon}$$

Partie I.

- 1) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp .
- 2) Posons $Y = S - X$. Prouver que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.
- 3) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- 4) En déduire que les deux variables X et Y sont indépendantes.

Partie II. Dans cette partie, on fixe $p = \frac{1}{2}$ et on pose $D = X - Y$.

- 1) Montrer que D admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(D)$.
- 2) Vérifier que $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Y^2)$.
- 3) En déduire que la covariance $\mathbf{Cov}(S, D) = 0$.
- 4) Montrer que les deux variables D et S ne sont pas indépendantes.

Partie III. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivement. Posons

$$U_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i.$$

- 1) Déterminer la fonction génératrice de X_1 .
- 2) En déduire la fonction génératrice de U_n .
- 3) Montrer que la variable U_n suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i$.
- 4) Soit $m \in \mathbb{N}$. Prouver que la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2 + \dots + X_n = m$ est une loi Binomiale que l'on précisera.
- 5) Soit $N \in \mathbb{N}$.

Déterminer la loi conditionnelle de $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ sachant $X_1 + X_2 + \dots + X_n = N$.

Problème 2.

Dans tout le sujet f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(\frac{-x^2}{2})$.

Partie I.

Soit

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right).$$

2) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = F(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = 0$.

b) En déduire l'expression de $G(x)$.

3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

4) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{2\pi}.$$

Partie II.

On pose

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx$$

1) Montrer que $\hat{f}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Prouver que $\hat{f}$ vérifie une équation différentielle que l'on précisera.

3) En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t) = \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

4) Montrer que les deux familles $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(f(2n\pi))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont sommables.

Partie III. On désigne par $U_0(x) = f(x)$ et $\forall n \geq 1$, $U_n(x) = f(x + 2n\pi) + f(x - 2n\pi)$.

1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Notons $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$.

2) Vérifier que la fonction U est paire.

3) Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} U_k(x)$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x + 2\pi) = S_n(x) + f(x + 2(n+1)\pi) - f(x - 2n\pi)$.

b) En déduire que U est 2π -périodique.

4) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} U'_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

5) Soit $b > 0$. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} U''_n$ converge normalement sur $[0, b]$.

6) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b] \subset \mathbb{R}$.

7) Démontrer que U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Partie IV. Pour toute fonction h continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(nx) dx.$$

1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(U) = 0$.

2) Montrer que $\forall n \geq 1$, $a_n(U) = -\frac{1}{n} b_n(U')$. En déduire que $a_n(U) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) Montrer de même que $\forall n \geq 1$, $b_n(U') = \frac{1}{n} a_n(U'')$.

4) En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n(U) \cos(nx)$ converge Normalement sur $\mathbb{R}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{p=0}^{p=k} U_p(x) \right) \cos(nx) dx = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x) \cos(nx) dx$.

b) En déduire que $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos(nx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(nx) dx$.

c) Montrer alors que $a_n(U) = \frac{\hat{f}(n)}{\pi}$.

6) En utilisant le résultat admis de Dirichlet: $\forall x \in \mathbb{R}$, $U(x) = \frac{a_0(U)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(U) \cos(nx)$.

montrer la formule de Poisson:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$