

## Devoir de synthèse d'Algèbre

## Exercice :

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ .

1. Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est compact.
2. (a) Montrer que si  $P \in O_n(\mathbb{R})$ , alors  $\det(P) \in \{-1, 1\}$ .  
 (b) Montrer que l'application  $f : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\} ; P \mapsto \det(P)$  est continue et surjective.  
 (c) Dédurre que  $O_n(\mathbb{R})$  n'est connexe par arcs.
3. Dans cette question, on prend  $n = 2$ .  
 (a) Montrer que  $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ .  
 (b) Montrer que l'application  $\varphi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\theta) \in SO_2(\mathbb{R})$  est continue et surjective.  
 (c) Dédurre que  $SO_2(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

## Problème :

Dans ce problème :

- $n$  désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  sont munis par leur bases et produits scalaires canoniques.
- $S_n(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel formé par les matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- $O_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); P^t P = I_n\}$ ;
- $O_n^+(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}); \det(P) = 1\}$ .
- $S \in S_n(\mathbb{R})$  est dite :  
 (i) **positive** si  ${}^t X S X \geq 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$   
 (ii) **définie-positive** si  ${}^t X S X > 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$
- $S_n^+(\mathbb{R}) = \{S \in S_n(\mathbb{R}); {}^t X S X \geq 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ ;
- $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{S \in S_n(\mathbb{R}); {}^t X S X > 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}$

## I - Diagonalisation simultannée

Soient  $A$  et  $B$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ . On note  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$  respectivement et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $f$ .

1. Justifier  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$  et que  $E_{\lambda_i}(f) \perp E_{\lambda_j}(f)$  pour  $i \neq j$ .
2. Soit  $i \in \{1, \dots, p\}$ .
  - (a) Prouver que  $E_{\lambda_i}(f)$  est  $g$ -stable.  
On note  $g_i$  l'endomorphisme induit par  $g$  sur  $E_{\lambda_i}(f)$ .
  - (b) Montrer que  $E_{\lambda_i}(f)$  admet une b.o.n,  $B_i$ , de vecteurs propres de  $g_i$ .
3. Dédire qu'il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tPAP$  et  ${}^tPBP$  sont diagonales.

## II - Matrices symétriques positives

1. Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$ .
  - (a) Prouver que,  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ ,
$$S_p(S - \beta I_n) = \{\lambda - \beta, \lambda \in S_p(S)\}.$$
  - (b) Montrer que
$$S = 0 \iff {}^tX S X = 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$
  - (c) Montrer que  $S \in S_n^+(\mathbb{R})$  si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.
  - (d) Montrer que  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.
  - (e) Montrer que si  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors elle est inversible et  $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que si  $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tM S M \in S_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  si, et seulement si, il existe  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^tM M$ .

## III - Une relation d'ordre sur $S_n^+(\mathbb{R})$

On définit sur  $S_n(\mathbb{R})$ , les deux relations suivantes :

$$(S_1 \leq S_2) \iff (S_2 - S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})),$$

$$(S_1 < S_2) \iff (S_2 - S_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R}))$$

1. (a) Montrer que " $\leq$ " est une relation d'ordre sur  $S_n(\mathbb{R})$ . Cette relation est-elle totale?

- (b) "  $<$  " est-elle une relation d'ordre ?
2. Soient  $S_1, S_2 \in S_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$ .  
Montrer que que  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t M S_1 M \leq {}^t M S_2 M$ .
3. Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$  telle que  $I_n \leq S$ .  
(a) Montrer que  $S_p(S) \subset [1, +\infty[$ . Dédire que  $S$  est inversible.  
(b) Montrer que  $0 < S^{-1} \leq I_n$ .
4. Soient  $S_1, S_2 \in S_n(\mathbb{R})$  telles que  $0 < S_1 \leq S_2$  et  $M_1 \in GL_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $S_1 = {}^t M_1 M_1$ .  
(a) Montrer que  $I_n \leq {}^t M_1^{-1} S_2 M_1^{-1}$ .  
(b) Dédire que  $S_2$  est inversible et que  $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$ .

#### IV - Racine carrée d'une matrice

Dans cette partie  $S$  désigne une matrice réelle symétrique d'ordre  $n$ .  $u$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $S$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $u$  et  $E_1, \dots, E_p$  les sous-espaces propres associés.

1. (a) Justifier que  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ .  
(b) Montrer que  $\forall k \in \{1, \dots, p\}, E_k^\perp = \bigoplus_{i \neq k} E_i$ .

On note  $p_k$  la projection orthogonale sur  $E_k$  et  $P_k$  sa matrice relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

2. Montrer que  $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ .
3. (a) Justifier que  $P_i P_j = 0$  pour  $i \neq j$ .  
(b) Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, S^k = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k P_i$ .  
(c) Dédire que si  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , alors  $Q(S) = \sum_{i=1}^p Q(\lambda_i) P_i$ .
4. Dans cette question, on suppose que  $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ .  
(a) Montrer que  $\psi : P \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)) \in \mathbb{R}^p$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.  
(b) Dédire qu'il existe un unique  $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$  tel que  $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ .

On note  $S_1 = Q(S)$ .

- (c) Montrer que  $S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})$  et que  $S_1^2 = S$ .
- (d) Soit  $S_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$  vérifiant  $S_2^2 = S$ .  
Justifier que  $S_1 S_2 = S_2 S_1$ . Dédurre que  $S_1 = S_2$ .
- (e) Montrer qu'il existe un unique  $R \in S_n^+(\mathbb{R})$  vérifiant  $R^2 = S$ .  
 $R$  est dite la racine carrée de  $S$  et on la note  $\sqrt{S}$ .