

Devoir de synthèse n°2

Problème 1 :

Partie 1 :

Pour tout couple (n, r) d'entiers naturels tel que $1 \leq r < n$, on rappelle la formule du " triangle de pascal " : $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$.

1. Soit r un entier naturel. On considère la série entière $\sum_{n \geq r} C_n^r x^n$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on pose : $f_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} C_n^r x^n$.

(b) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$ et $r \geq 1$, on a

$$(1-x)f_r(x) = xf_{r-1}(x)$$

2. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x)$ et $f_1(x)$.

3. Montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, f_r(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

4. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq r} \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1} x^n$ vaut 1.

5. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$, on pose $h_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1} x^n$.

(a) Montrer que h_r est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et que pour tout réel x de $] -1, 1[$, on a : $h'_r(x) = f_{r-1}(x)$.

(b) En déduire que, pour tout x de $] -1, 1[$, on a $h_r(x) = \int_0^x \frac{t^{r-1}}{(1-t)^r} dt$.

(c) À l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, h_r(x) = \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{y^{r-1}}{1+y} dy.$$

(d) En déduire, en utilisant une intégration par parties, que l'on peut écrire :

$$\forall x \in]-1, 1[, h_r(x) = \frac{x^r}{r(1-x)^{r-1}} + \frac{1}{r} \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{y^r}{(1+y)^2} dy.$$

Partie 2 :

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire entière X est définie par :

$$g_X(t) := E(t^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k \mathbb{P}(X = k).$$

Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui suit la loi géométrique de paramètre p . On rappelle que pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$.

1. Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .
2. Montrer que la fonction génératrice de la variable aléatoire X est donnée par

$$g_X(t) = \frac{pt}{1-qt}; \quad \forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[.$$

3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, mutuellement indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p . Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Calculer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable aléatoire S_n .

(b) Montrer que la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n est donnée par

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; \quad g_{S_n}(t) = \frac{p^n}{q^{n-1}} t f_{n-1}(qt).$$

(c) En déduire que

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; \quad g_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} t^k.$$

(d) En déduire que la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n est donnée par

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < k < n \\ C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{n}{S_n}$.

(a) Montrer que $E(Y_n) = n \left(\frac{p}{q}\right)^n h_n(q)$.

(b) Montrer que $E(Y_n) - p = \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{\frac{q}{p}} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy$.

(c) Montrer que $0 \leq E(Y_n) - p \leq \frac{q}{p(n+1)}$.

(d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n)$.

Problème 2 :

On désigne par $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction notée $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt.$$

Partie 1 : Dans cette partie f est un élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Prouver que $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$

3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-ixt} f(t) dt.$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\hat{f}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-n} |f(t)| dt + \int_n^{+\infty} |f(t)| dt \right)$$

(b) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\hat{f}$.

(c) En déduire que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{f}(x) = 0.$$

(Indication. On pourra utiliser que si $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{ixt} h(t) dt = 0).$$

4. Application : Existe-t-il $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\hat{f}(x) = \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Partie 2 : Dans cette partie f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et a un nombre réel.

1. Prouver que les fonctions $\hat{f}g$ et $f\hat{g}$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

(a) En utilisant le théorème de la convergence dominée prouver que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n f(t) \left(\int_{-p}^p e^{-ixt} g(x) dx \right) dt = \sqrt{2\pi} \int_{-n}^n f(t) \hat{g}(t) dt$$

(b) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-n}^n e^{-ixt} f(t) dt \right) dx = \sqrt{2\pi} \int_{-n}^n f(t) \hat{g}(t) dt$$

3. Montrer alors que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx$$

4. On désigne par $\tau_a f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_a f(x) = f(x - a)$.

(a) Prouver que $\tau_a f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

(b) Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $\widehat{\tau_a f}(x) = e^{-iax} \hat{f}(x)$.

Partie 3 : Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{H}_0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{H}_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1. Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_0(t) dt$.

2. Établir que pour tout x réel :

$$\widehat{\mathcal{H}_0}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt) dt$$

3. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $g_n(t) = t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}}$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(b) On considère pour $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

i. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+1) \cdot I_n$

ii. En déduire I_n en fonction de n .

(c) En utilisant le théorème d'intégration terme à terme, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{\mathcal{H}_0}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4. Application : Pour $\forall n \geq 1$, on désigne par W_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $W_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2n^2}}$. Déterminer $\widehat{W}_n$.

Partie 4 : On considère l'ensemble $S(\mathbb{R})$ défini par

$$S(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ de classe } C^\infty \text{ telle que : } \forall (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^k f^{(n)}(x) = 0\}$$

1. Montrer que $S(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) Si la fonction f appartient à $S(\mathbb{R})$ alors la fonction dérivée f' appartient à $S(\mathbb{R})$.

(b) Si f une fonction de l'espace $S(\mathbb{R})$ et P une fonction polynôme alors la fonction $P \cdot f$ appartient à l'espace $S(\mathbb{R})$.

(c) Si f et g sont deux fonctions de l'espace $S(\mathbb{R})$ alors la fonction fg appartient à l'espace $S(\mathbb{R})$.

(d) Toute fonction f de l'espace $S(\mathbb{R})$, est une fonction de l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

3. Soit f une fonction de l'espace $S(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(\hat{f})^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^n e^{-ixt} f(t) dt$$

(b) En faisant une intégration par partie, prouver que pour tout x réel on a

$$(ix) \hat{f}(x) = \widehat{f'}(x)$$

(c) En déduire que pour tout k dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$ on a

$$(ix)^k \hat{f}(x) = \widehat{f^{(k)}}(x)$$

(d) Déduire alors que $\hat{f}$ est dans $S(\mathbb{R})$.