

Exercice:

1) Les sous-grps de $\mathbb{Z}$ sont les $m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ (auss)

2) $G = \langle a \rangle$ cyclique d'ordre $n \geq 2$.

a) $o(a) = |\langle a \rangle| = |G| = n$.

b) $H \leq G$, $H \neq \{e\}$ et de G .

c) $I = \{k \in \mathbb{Z}, a^k \in H\} \subset \mathbb{Z}$.

$$a^0 = e \in H \Rightarrow 0 \in I \Rightarrow I \neq \emptyset.$$

Soit $k, p \in I$ m. q. $k-p \in I$.

$$a^{k-p} = a^k a^{-p} = a^k (a^p)^{-1} \in H \text{ car } a^k, a^p \in H.$$

donc $k-p \in I$

on a I est un sous-grp de $\mathbb{Z}$

3) I est un sous-grp de $\mathbb{Z}$ donc $\exists m \in \mathbb{N}$ tq

$$I = m\mathbb{Z}$$

Si $m = 0$ alors $I = \{0\}$ c.à.d. $a^k \in H$ ssi $k = 0$

donc $H = \{a^0\} = \{e\}$ "impossible" donc $m \neq 0$

$$\text{m. q. } H = \langle a^m \rangle.$$

$$m \in m\mathbb{Z} = I \Rightarrow a^m \in H \Rightarrow \langle a^m \rangle \subset H. (1)$$

Inverse: Soit $x \in H \subset G = \langle a \rangle$.

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ $\&$ $n = a^k$.

or $n \in H$ donc $k \in I = m\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow k = mp.$$

donc $n = a^{mp} = (a^m)^p \in \langle a^m \rangle$.

or $n \in \langle a^m \rangle$

donc $H \subseteq \langle a^m \rangle$ (2)

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow H = \langle a^m \rangle.$$

(iii) on a $e = a^m \Rightarrow a^m = e \in H$.

$$\Rightarrow m \in I = m\mathbb{Z} \Rightarrow m \text{ divise } n.$$

$$\text{donc } n = pm.$$

$$m \cdot q \mid H \mid = p.$$

$$\text{on a } (a^m)^p = a^{mp} = a^n = e.$$

$$\Rightarrow p \text{ divise } o(a^m) = |H| = q. \quad (1)$$

or $q = o(a^m)$,
d'autre part $(a^m)^q = e$, or $q = o(a^m)$.

$$\Rightarrow a^{mq} = e. \Rightarrow n \text{ divise } mq.$$

$$\text{c\`a d } pm \text{ divise } mq$$

$$\Rightarrow p \text{ divise } q \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow p = q \text{ c\`a d. } |H| = p = \frac{n}{m}.$$

3) G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$.

on note $m = |G| \in \mathbb{N}^*$.

si $m = 1$ alors $G = \{I_n\}$. Dans ce cas le résultat est vrai car I_n est diagonalisable.

si $m \geq 2$; $\forall A \in G$ on a $A^m = I_n$.

on note $P(X) = X^m - 1$.

$P(A) = A^m - I_n = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A .

de plus P est scindé sur $\mathbb{C}$, admettant

m racines simples $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ $0 \leq k \leq m-1$.

donc A est diagonalisable d. $M_n(\mathbb{C})$.

Rq: on peut montrer, autrement, que P

admet m racines simples d. $\mathbb{C}$.

$$P'(X) = mX^{m-1}$$

$$P'(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0.$$

or $P(0) = -1 \neq 0$. donc P n'admet

aucune racine multiple c. q. f. d.

Problème:

I)

① Soit N une norme euclidienne de $\mathbb{R}^h$.
 $N(u) = \sqrt{\mathcal{I}(u, u)}$ où $\mathcal{I}$ est un p.s de $\mathbb{R}^h$.

Soit $(u, y) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^h$.

$$\begin{aligned} N^2(u+y) &= \mathcal{I}(u+y, u+y) \\ &= \mathcal{I}(u, u) + \mathcal{I}(u, y) + \mathcal{I}(y, u) + \mathcal{I}(y, y) \\ &= N^2(u) + 2\mathcal{I}(u, y) + N^2(y) \quad (1) \end{aligned}$$

on remplace y par $-y$, on obtient

$$N^2(u-y) = N^2(u) - 2\mathcal{I}(u, y) + N^2(y) \quad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ l'identité des parallélogramme.

$$\text{I) } e_1 + e_2 = (1, 1) \text{ et } e_1 - e_2 = (1, -1).$$

$$\text{donc } \|e_1 + e_2\|_\infty^2 + \|e_1 - e_2\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2.$$

$$2(\|e_1\|_\infty^2 + \|e_2\|_\infty^2) = 2(1 + 1) = 4 \neq 2.$$

donc $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité
des parallélogramme et par suite
cette norme n'est pas euclidienne.

$$(c) \|e_1 + e_2\|_1^2 + \|e_1 - e_2\|_1^2 = 2^2 + 0^2 = 4.$$

$$2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2) = 2(1+1) = 4 \neq 8.$$

$$2) S \in S_n(\mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$\text{Soit } \lambda \in S_{PR}(\mathbb{R}); \exists V \neq 0 \text{ tel que } SV = \lambda V.$$

$$\text{car } {}^t_V SV > 0 \text{ car } V \neq 0.$$

$$\Rightarrow {}^t_V \lambda V > 0 \Rightarrow \lambda {}^t_V V > 0.$$

$$\Rightarrow \lambda \|V\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \text{ car } V \neq 0$$

$$\text{donc } S_{PR}(S) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

$$\Leftarrow S \in S_n(\mathbb{R}) \text{ et } S_{PR}(S) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

$$S \in S_n(\mathbb{R}) \text{ donc } \exists P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ telle que.}$$

$${}^t_P S P = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$S_{PR}(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{Soit } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}.$$

$${}^t_X S X = {}^t_X P D {}^t_P X.$$

$$= {}^t({}^t_P X) D ({}^t_P X) = {}^t_Y D Y$$

$$\text{car } Y = {}^t_P X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

5

$$\text{donc } {}^tXSX = (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

$${}^tXSX = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i y_i^2 = 0 \quad \forall i \quad (\lambda_i > 0)$$

$$\Rightarrow y_i = 0 \quad \forall i \quad (\lambda_i > 0)$$

$$\Rightarrow Y = 0$$

$$\Rightarrow {}^tPX = 0$$

$$\Rightarrow X = 0 \quad \text{car } {}^tP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \in GL_n(\mathbb{R})$$

donc pour $X \neq 0$, ${}^tXSX > 0$

$$\text{c.à.d. } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

* Autrement pour la réciproque.

$S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une b.o.b.

$B = (V_1, \dots, V_n)$ de a.p. de S associées

aux a.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($SV_i = \lambda_i V_i$).

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

$$\exists (u_1, \dots, u_n) \neq (0, \dots, 0) \text{ tel que } X = \sum_{i=1}^n u_i V_i$$

$$\text{donc } SX = \sum_{i=1}^n u_i S V_i = \sum_{i=1}^n u_i \lambda_i V_i$$

$${}^t_X SX = \left(\sum_{i=1}^n u_i {}^t V_i \right) \left(\sum_{j=1}^n u_j \lambda_j V_j \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i u_j \lambda_j {}^t V_i V_j$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i u_j \lambda_j \underbrace{{}^t V_i V_j}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2 > 0 \quad \text{car } \begin{cases} \lambda_i > 0 \quad \forall i \\ (u_1, \dots, u_n) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}$$

Rq: La 2^e méthode est valable même pour les endomorphismes symétriques.

$$3) S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

$$\varphi_S(u, y) = {}^t_X S Y$$

$$= {}^t({}^t_X S Y) \quad \text{car } {}^t_X S Y \in \mathbb{R}.$$

$$= {}^t_Y {}^t_S X$$

$$= {}^t_Y S X \quad \text{car } S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$= \varphi_S(y, u)$$

$$\begin{aligned}
 * \quad \mathcal{L}_S (x + \alpha z, y) &= {}^t (x + \alpha z) S y \\
 &= {}^t x S y + \alpha {}^t z S y \\
 &= \mathcal{L}_S (x, y) + \alpha \mathcal{L}_S (z, y)
 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}_S$ est linéaire $\forall$ la 1^{ère} variable.

d'où $\mathcal{L}_S$ est une forme bilinéaire sym.

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$$\mathcal{L}_S (x, x) = {}^t x S x > 0 \text{ car } S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } x \neq 0$$

donc $\mathcal{L}_S$ est définie-positif.

donc $\mathcal{L}_S$ est un p.s de $\mathbb{R}^n$.

Soit un p.s de $\mathbb{R}^n$ et $S = (\mathcal{L}(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\text{Soit } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$\mathcal{L}_S (x, y) = \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \mathcal{L}(e_i, e_j).$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } \mathcal{I}(u, y) &= \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=1}^n \mathcal{I}(e_i, e_j) y_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n u_i (S y)_i \\
 &= {}^t X S y.
 \end{aligned}$$

b) Soit $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in D_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \mathbb{R}^n$.

$${}^t X S X = \mathcal{I}(u, u) > 0 \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I} \text{ est définie-positive} \\ u \neq 0. \end{array} \right.$$

donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

N.B.: d'après 4-a et b: $\mathcal{I}$ est un p.s de $\mathbb{R}^n$

on $\exists S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\neq \mathcal{I}(u, y) = \mathcal{I}_S(u, y) = {}^t X S y$.

c) si $\mathcal{I}$ est le p.s canonique de $\mathbb{R}^n$ alors

$$\mathcal{I}(u, y) = {}^t X y = {}^t X \cdot I_n y \quad \forall (u, y) \in (\mathbb{R}^n)^2.$$

donc $S = I_n$.

Partie II: Norme norme de $\mathbb{R}^n$.

1) $\text{Isom}(N) = \{ U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), N(U(u)) = N(u) \forall u \}$.

vérifions tout d'abord que $\text{Isom}(N) \subset \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $U \in \text{Isom}(N)$.

$$u \in \text{Ker}(U) \Leftrightarrow U(u) = 0.$$

$$\Rightarrow N(u) = N(U(u)) = N(0) = 0.$$

donc $u = 0$.

$$\text{d'où } \text{Ker}(U) = \{0\}.$$

or $\dim \mathbb{R}^n < \infty$ donc $U \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$

donc $\text{Isom}(N) \subset \text{GL}(\mathbb{R}^n)$.

$$* N(\text{id}(u)) = N(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

donc $\text{id} \in \text{Isom}(N) \Rightarrow \text{Isom}(N) \neq \emptyset$.

* Soit $f, g \in \text{Isom}(N)$, on a $f \circ g^{-1} \in \text{Isom}(N)$.

$$N((f \circ g^{-1})(u)) = N(f(g^{-1}(u)))$$

$$= N(g^{-1}(u)) \quad \text{car } f \in \text{Isom}(N)$$

$$= N(g(g^{-1}(u))) \quad \text{car } g \in \text{Isom}(N)$$

$$= N(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

donc $f \circ g^{-1} \in \text{Isom}(N)$

on a $\text{Isom}(N)$ est un s.g de $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$

$$2) S_1(N) = \{u \in \mathbb{R}^n, N(u) = 1\}.$$

$$\Rightarrow U \in \text{Isom}(N)$$

$$\text{m q } U(S_1(N)) = S_1(N).$$

$$* \text{ Soit } u \in S_1(N).$$

$$N(U(u)) = N(u) = 1 \Rightarrow U(u) \in S_1(N)$$

$$\text{donc } U(S_1(N)) \subset S_1(N). \quad (1)$$

$$\text{Soit } u \in S_1(N)$$

$$U \in \text{Isom}(N) \subset GL(\mathbb{R}^n).$$

$$\text{donc } \exists u' \in \mathbb{R}^n \text{ tq } u = U(u').$$

$$N(u') = N(U(u')) = N(u) = 1.$$

$$\Rightarrow u' \in S_1(N)$$

$$\text{donc } u = U(u') \in U(S_1(N))$$

$$\text{d'où } S_1(N) \subset U(S_1(N)) \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow U(S_1(N)) = S_1(N).$$

$$\Leftarrow \text{ on suppose que } U(S_1(N)) = S_1(N).$$

$$\text{Soit } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; y = \frac{u}{N(u)} \in S_1(N).$$

$$\text{donc } U(y) \in S_1(N).$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{U(u)}{N(u)}\right) = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{N(U(u))}{N(u)} = 1 \Rightarrow N(U(u)) = N(u).$$

$$\text{de plus } N(U(0)) = N(0) = 0 = N(0).$$

$$\text{donc } N(U(u)) = N(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{càd } U \in \text{Isom}(N).$$

$$3) \quad n=2; \quad B = (e_1, e_2) \text{ la b. c. de } \mathbb{R}^2.$$

$$D = \text{vect}(e_1 - e_2) = \text{vect}((1, -1))$$

Δ la symétrie orthogonale $x \mapsto x^\perp$.

$$D = \text{vect}(1, -1); \quad D^\perp = \text{vect}(1, 1).$$

$$U_1 = \frac{(1, -1)}{\|(1, -1)\|_2} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$$

$$U_2 = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|_2} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}.$$

$\Delta = 2p - \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ où p est la proj-orth sur D .

(U_i) b. o. n. de D donc.

$$\forall (u, y) \in \mathbb{R}^2; \quad \varphi(u, y) = \langle (u, y), u_1 \rangle u_1.$$

$$= \left\langle (u, y), \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}.$$

$$= \frac{1}{2} (u - y) (1, -1).$$

$$= \left(\frac{u-y}{2}, \frac{y-u}{2} \right).$$

$$\text{et } \Delta(u, y) = (u - y, y - u) - (u, y)$$

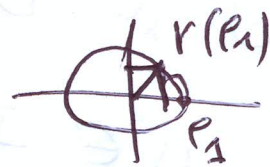
$$= (-y, -u).$$

$$\text{donc } \|\Delta(u, y)\|_1 = \|(-y, -u)\|_1 = |-y| + |-u| \\ = \|(u, y)\|_1.$$

$$\text{d'où } \Delta \in \text{Isom}(\|\cdot\|_1)$$

* r la rotation vectorielle (de centre $(0, 0)$)
est d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$r(e_1) = \cos \frac{\pi}{3} e_1 + \sin \frac{\pi}{3} e_2.$$



$$\|r(e_1)\|_1 = \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| + \left| \sin \frac{\pi}{3} \right| = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc } r \notin \text{Isom}(\|\cdot\|_1). \quad \neq 1 = \|e_1\|_1$$

N.B: r et s sont des isométries de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

donc $r, s \in \text{Isom}(\|\cdot\|_2)$

III] $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N_S(u) = \sqrt{e_X S X}$

1[$\Rightarrow$] $\varphi_S(u, v) = \varphi_S(u, v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$

pour $y = u$ on obtient:

$$\begin{aligned} N_S^2(u) &= \varphi_S(u, u) \\ &= \varphi_S(u, u). \end{aligned}$$



$$= N_S^2(u)$$

donc $N_S(u) = N_S(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

d'où $U \in \text{Isom}(N_S)$.

$\Rightarrow U \in \text{Isom}(N_S)$

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\text{on a } N_S^2(u+v) = N_S^2(u+v)$$

$$\Rightarrow \varphi_S(u+v, u+v) = \varphi_S(u+v, u+v)$$

$$\Rightarrow N_S^2(u) + 2 \mathcal{L}_S(u, v(y)) + N_S^2(v(y)) = N_S^2(u) + 2 \mathcal{L}_S(u, y) + N_S^2(y)$$

$$\text{on } N_S(v(u)) = N_S(u) \text{ et } N_S(v(y)) = N_S(y)$$

$$\text{d'où } \mathcal{L}_S(v(u), v(y)) = \mathcal{L}_S(u, y).$$

$$2) A = \Pi(U, B) \in \Pi_n(\mathbb{R}).$$

d'après 1°) on a:

$$U \in \text{Isom}(N_S) \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}_S(v(u), v(y)) = \mathcal{L}_S(u, y) \quad \forall u, y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$$

$${}^t(Ax) S (Ay) = {}^t x S y \quad \forall x, y \in \Pi_n(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow {}^t x {}^t A S A y = {}^t x S y \quad \forall x, y.$$

$$(*) \Leftrightarrow {}^t A S A = S$$

$$(*) ?? : {}^t x \Pi y = {}^t x N y \quad \forall x, y \in \Pi_{n+1}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \langle x, \Pi y \rangle = \langle x, N y \rangle \quad \forall x, y.$$

d'où pour y fixé:

$$\langle \Pi y - N y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \Pi_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \Pi Y - N Y \in (\Pi_{n+1}(\mathbb{R}))^\perp = \{0\}.$$

$$\text{donc } \Pi Y = N Y \quad \forall Y \in \Pi_{n+1}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \Pi = N.$$

③ $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$,
 associée à son p.s. unique, ($S = I_n$)

$$A = \Pi(U, B)$$

$$U \in \text{Isom}(\|\cdot\|_2) \Leftrightarrow A \cdot I_n A = I_n.$$

$$\Leftrightarrow A A = I_n$$

$$\Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

$$\Leftrightarrow U \in O(\mathbb{R}^n) \quad (B \text{ b.o.n}).$$

IV] Racine carrée d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$:

$$\textcircled{a} f: \mathbb{R}_r[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$p \mapsto (p(u_0), \dots, p(u_r))$$

f est linéaire.

$$p \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow p(u_i) = 0 \quad \forall i \in [0, r].$$

$$\Rightarrow p \text{ admet aux moins } (r+1) \text{ racines}$$

$$\Rightarrow p = 0 \quad \text{car } \deg p \leq r.$$

donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$, de plus $\dim \mathbb{R}_r[x] =$
 $\dim \mathbb{R}^{r+1} = r+1$. donc f est un isomorphisme

b) f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_r[x]$ de $\mathbb{R}^{r+1}$
 donc $\forall (y_0, y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{R}^{r+1}; \exists! L \in \mathbb{R}_r[x]$
 $f(L) = (y_0, \dots, y_r) \iff L(x_i) = y_i \quad \forall i$.

c) $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
 $P \in O_n(\mathbb{R}) \iff P^t S P = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$
 où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les c.p de S deux à deux
 distinctes ($\lambda_i > 0 \quad \forall i$).

on a $D_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r})$

$$\textcircled{a} A = P D_1^t P; \quad D_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r})$$

$$A = {}^t(P^t) {}^t D_1 {}^t P = P D_1 {}^t P = A$$

donc $A \in S_n(\mathbb{R})$.

$\text{Sp}(A) = \{\sqrt{\lambda_i}; 1 \leq i \leq r\} \in \mathbb{R}_+^*$ donc $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

de plus $A^2 = (P D_1 {}^t P)^2$
 $= P D_1^2 {}^t P$ ou ${}^t P = P^{-1}$.
 $= P D {}^t P = S.$

$$b) A = P D_1 {}^t P$$

$$S = P D {}^t P$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distincts donc.

$$\exists L \in \mathbb{R}_n[x] \nsubseteq L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

$$\text{et pour m\^etre } L(D) = \text{diag}(L(\lambda_1), \dots, L(\lambda_r))$$

$$= \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r})$$

$$= D_1.$$

$$L(S) = L(P D {}^t P).$$

$$= P \cdot L(D) \cdot {}^t P \quad \text{car } {}^t P = P^{-1}.$$

$$= P D_1 {}^t P = A.$$

$$c) B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \nsubseteq B^2 = S.$$

$$\text{on a } A = L(S) = L(B^2).$$

$$\text{on pose } Q_1(X) = L(X^2) \in \mathbb{R}[X].$$

$$A = L(B^2) = Q_1(B).$$

$$\text{si } Q_1 = 0 \text{ alors } A = 0 \text{ (impossible car } \sqrt{\lambda_i} > 0 \forall i).$$

$$d) M, N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$\text{on a } M + N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

$${}^t(N+M) = {}^tN + {}^tM = M+N$$

$$\Rightarrow M+N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

$$\text{Soit } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}.$$

$${}^tX(N+M)X = {}^tXNX + {}^tXMX > 0.$$

$$\text{donc } N+M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

$$\text{D'après I.2; } \text{Sp}(N+M) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow 0 \notin \text{Sp}(N+M)$$

$$\Rightarrow N+M \text{ est inversible.}$$

$$c) A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \nsubseteq A^2 = B^2 = S.$$

$$\Rightarrow A^2 - B^2 = \tilde{0}.$$

$$\text{on } A = Q_1(B) \text{ avec } Q_1 \in \mathbb{R}[X] \text{ donc.}$$

$$AB = BA \text{ et par suite: } (A-B)(A+B) = \tilde{0}.$$

$$\Rightarrow A-B = \tilde{0} \text{ car } A+B \text{ est inversible}$$

$$\Rightarrow A = B.$$

$$\underline{\text{cl:}} \exists! A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \nsubseteq A^2 = S.$$