
Devoir de contrôle n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour $t \geq 0$, $f_n(t) = \frac{1}{(\cosh t)^{n+1}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\cosh t)^{n+1}} dt.$$

2. Calculer a_0 et a_1 .

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

4. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

- (b) Établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $t \geq 0$ les inégalités suivantes:

$$1 + \frac{n+1}{2}t^2 \leq (\cosh t)^{n+1} \leq e^{(n+1)t}.$$

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}$.

- (b) Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes: $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$

et $\sum_{n \geq 0} \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} x^n$. En déduire le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

- (c) Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n (-1)^n$ converge et que $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

6. (a) Montrer par une intégration par parties la relation de récurrence entre a_n et a_{n+2} suivante:

$$\forall n \geq 0, (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n.$$

- (b) En déduire suivant la parité de n , l'expression de a_n .

7. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in [-1, 1[$.

(a) Montrer que g vérifie

$$(1 - x^2)g'(x) - xg(x) = 1 \text{ si } |x| < 1,$$

et que

$$g(0) = a_0.$$

(b) Trouver l'expression sur $] - 1, 1[$ de g à l'aide de fonctions usuelles.

(c) En considérant la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{2}(g(x) - g(-x))$, donner le développement en série entière de $(\arcsin x)^2$.

8. On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t - x}.$$

(a) Montrer que f est bien définie sur $] - \infty, 1[$.

(b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $] - \infty, 1[$.

(c) Justifier que $\forall t \geq 0$ et $\forall x \in] - 1, 1[$,

$$\frac{1}{\cosh t - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(\cosh t)^{n+1}}.$$

(d) Montrer alors que $\forall x \in] - 1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

(e) Montrer que $g(-1) = 1$.

BON TRAVAIL