

Exercice:

$$G < GL_n(\mathbb{R}); \quad m = |G| \in \mathbb{N}^*.$$

1. soit $A \in G$

G est d'ordre fini m donc A est d'ordre fini p
avec p divise m . $m = pk$

$$A^m = A^{pk} = (A^p)^k = I_n^k = I_n.$$

2. $A \in G$, $\lambda \in S_{\mathbb{R}}(A)$, V vecteur propre de A associé à λ .
a) montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $A^k V = \lambda^k V$.

* pour $k=0$:

$$A^0 V = I_n \cdot V = V = \lambda^0 \cdot V$$

* soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $A^k V = \lambda^k V$

$$\begin{aligned} A^{k+1} V &= A \cdot A^k V = A(\lambda^k V) = \lambda^k A V \\ &= \lambda^k \cdot \lambda V = \lambda^{k+1} V \end{aligned}$$

* on a $A^k V = \lambda^k V \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

b) pour $k=m$ on obtient $A^m V = \lambda^m V$

$$\text{a) } A^m = I_n \text{ donc } \lambda^m V = V \Rightarrow \lambda^m = 1 \text{ car } V \neq 0$$

$$\text{c) } \forall \lambda \in S_{\mathbb{R}}(A), \lambda^m = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1.$$

$$\text{d'nc } S_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$$

3-aj Soit $A \in G$.

A est diagonalisable $\triangleq \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$

ou $\text{SP}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$ donc $\lambda_i^2 = 1 \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

donc $D^2 = I_n$ et $A^2 = P D^2 P^{-1} = I_n$.

b) $A^2 = I_n \quad \forall A \in G$ donc $A^{-1} = A \quad \forall A \in G$.

Soit dans $A, B \in G$, $AB \in G$ car G est un p.g

$$\Rightarrow AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$$

donc G est abélien.

Problème:

E un K -e.v., $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\dim E = n \geq 2$.

$f \in \mathcal{L}(E)$.

I) $c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}$.

1- $c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}$.

* $\text{id}_E \circ f = f \circ \text{id}_E = f$ donc $\text{id}_E \in c(f)$.

* Soient $g, h \in c(f)$ et $\alpha \in K$.

$$\begin{aligned} f \circ (g + \alpha h) &= f \circ g + \alpha f \circ h \\ &= g \circ f + \alpha h \circ f \\ &= (g + \alpha h) \circ f. \end{aligned}$$

donc $g + \alpha h \in c(f)$.

$$\begin{aligned}
 * f \circ (g \circ h) &= (f \circ g) \circ h \\
 &= (g \circ f) \circ h \\
 &= g \circ (f \circ h) \\
 &= (g \circ h) \circ f
 \end{aligned}$$

donc $g \circ h \in C(f)$

Or on a $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2. $(n, f(n))$ est liée $\forall n \in E$.

a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.
 $(e_i, f(e_i))$ est liée de plus $e_i \neq 0_E$ donc
 $\exists \lambda_i \in K \text{ tq } f(e_i) = \lambda_i e_i$

b) $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E donc $v = \sum_{i=1}^n e_i \neq 0_E$
 de plus $(v, f(v))$ est liée donc $\exists \lambda \in K \text{ tq}$
 $f(v) = \lambda v$.

$$c) v = \sum_{i=1}^n e_i$$

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^n e_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \lambda \sum_{i=1}^n e_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) e_i = 0$$

a B est libre donc $\lambda - \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

$$\Leftrightarrow \lambda_i = \lambda \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

$$\text{donc } \forall i \in \{1, \dots, m\}; f(e_i) = \lambda_i e_i \\ = \lambda e_i$$

car si $f = \lambda \text{id}_E$ sur f et λid_E se reconnaissent
sur la base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

$$3. f \neq \lambda \text{id}_E \quad \forall \lambda \in K.$$

a) f n'est pas une homothétie de E donc
d'après 2. $\exists u_1 \in E$ tel que $(u_1, f(u_1))$ est libre.

b) $u_2 = f(u_1)$, $B' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E .

$$(i) (f \circ g)(u_1) = f(u_1) = u_2.$$

$$(g \circ f)(u_1) = g(u_2) = 0$$

$$(ii) (f \circ g)(u_1) = u_2 \neq 0 = (g \circ f)(u_1).$$

$$\text{donc } f \circ g \neq g \circ f \Rightarrow g \notin C(f).$$

4) si f est une homothétie de E alors

$$f = \lambda \text{id}_E \text{ avec } \lambda \in K.$$

$$\text{donc } g \circ f = \lambda g = f \circ g \quad \forall g \in \mathcal{L}(E)$$

on a: $C(f) = \mathcal{L}(E)$.

Réciproquement:

si f n'est pas une homothétie de E , d'après

3) $\exists g \in \mathcal{L}(E) \setminus C(f)$ donc $C(f) \neq \mathcal{L}(E)$

cl: $C(f) = \mathcal{L}(E) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K, f = \lambda \text{id}_E$.

II) f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
($n = \dim E \geq 2$).

1. a) $\text{card}(S_f(f)) = n = \dim E$ donc f est diagonalisable et par suite il existe une base $B_0 = (u_1, \dots, u_n)$ de E formée par des vecteurs propres de f associés aux a.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivement c-à-d $f(u_i) = \lambda_i u_i \forall i$

b) soit $i \in \{1, \dots, n\}$.
 λ_i est une a.p. simple de f donc $\dim E_{\lambda_i}(f) = 1$.
de plus $u_i \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$ donc $E_{\lambda_i}(f) = \text{vect}(u_i)$

2. $g \in C(f)$ et $i \in \{1, \dots, n\}$.

a) $g \circ f = f \circ g$ donc $E_{\lambda_i}(f)$ est g -stable.

~~n~~ $u_i \in \text{vect}(u_i) = E_{\lambda_i}(f)$ donc

$g(u_i) \in E_{\lambda_i}(f) = \text{vect}(u_i)$

$\Rightarrow \exists \beta_i \in K, g(u_i) = \beta_i u_i$

3. D'après 2) $\exists g \in C(f)$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,
 $\exists \beta_i \in K$ tq $g(u_i) = \beta_i u_i$

$$\Rightarrow \Pi(g, B_0) = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Réciproque:

si $\Pi(g, B_0) = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ et

$$\Pi(g \circ f, B_0) = \Pi(g, B_0) \cdot \Pi(f, B_0)$$

$$= \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

$$= \text{diag}(\beta_1 \lambda_1, \dots, \beta_n \lambda_n)$$

$$= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$= \Pi(f \circ g, B_0).$$

$$\Rightarrow f \circ g = g \circ f \Rightarrow g \in C(f).$$

cl: $g \in C(f) \Leftrightarrow \Pi(g, B_0)$ est diagonale.

$$b) \varepsilon: C(f) \longrightarrow \Pi_n(K)$$

$$g \longmapsto \Pi(g, B_0)$$

$\forall g, h \in C(f)$ et $\alpha \in K$ on a:

$$\Psi(g + \alpha h) = \Pi(g + \alpha h, B_0)$$

$$= \Pi(g, B_0) + \alpha \Pi(h, B_0)$$

$$= \varepsilon(g) + \alpha \varepsilon(h).$$

donc $\mathcal{E}$ est linéaire.

$$\text{de plus } \text{Ker } \mathcal{E} = \{g \in C(\mathcal{I}) \mid \Pi(g, B_0) = \vec{0}\} \\ = \{\vec{0}\}.$$

donc $\mathcal{E}$ est injective.

$$c) \text{Im}(\mathcal{E}) = \{\Pi(g, B_0), g \in C(\mathcal{I})\}.$$

$$\forall g \in C(\mathcal{I}); \Pi(g, B_0) \in D_n(K) = \{\text{diag}(B_1, \dots, B_n) \mid B_i \in K\}$$

$$\text{donc } \text{Im}(\mathcal{E}) \subset D_n(K).$$

Inversement: Soit $D = \text{diag}(B_1, \dots, B_n) \in D_n(K)$

$$\exists! g \in C(\mathcal{I}) \text{ tel que } \Pi(g, B_0) = D.$$

$\Pi(g, B_0)$ est diagonale donc d'après 3. a,

$$g \in C(\mathcal{I})$$

$$\text{donc } \exists g \in C(\mathcal{I}) \text{ tel que } \mathcal{E}(g) = D.$$

$$\Rightarrow D \in \text{Im}(\mathcal{E})$$

$$\underline{\text{Cl.}} \quad \text{Im}(\mathcal{E}) = D_n(K).$$

$$\mathcal{E} \in \mathcal{L}(C(\mathcal{I}), D_n(K))$$

le théorème s'écrit:

$$\dim C(\mathcal{I}) = \dim \text{Ker } \mathcal{E} + \dim \text{Im}(\mathcal{E}).$$

$$\dim C(\mathcal{I}) = 0 + \dim D_n(K) = n$$

III] f nilpotent d'indice $q \geq 1$.

1) a)

f nilpotent d'indice q donc $f^{q-1} \neq 0$

$\Rightarrow \exists v \in E, f^{q-1}(v) \neq 0 \in$.

b) on note $C = (v, f(v), \dots, f^{q-1}(v)) = (f^k(v))_{0 \leq k \leq q-1}$

on suppose que C est liée

$\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que.

$$\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i f^i(v) = 0 \in \quad (*)$$

on note $r = \min \{i \in \{0, \dots, q-1\}, \alpha_i \neq 0\}$.

(*) s'écrit: $\alpha_r f^r(v) + \dots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(v) = 0$.

on applique $f^{q-1-r} \Rightarrow \alpha_r f^{q-1}(v) = 0$.

$\Rightarrow \alpha_r = 0$ car $f^{q-1}(v) \neq 0 \in$.

ceci est impossible car $\alpha_r \neq 0$.

anti: C est libre.

g) soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in K^q$ tq: $\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i f^i(v) = 0$.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i f^i(v) = 0.$$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, q-1\}$ car C est libre.

on a: $(f^k)_{0 \leq k \leq q-1}$ est une famille libre
de $\mathcal{L}(E)$

2) $q=n$, d'après 1) $\exists v \in E$ tel que $B' = (v, \dots, f^{n-1}(v))$ est une famille libre de E , de plus $\dim E = n$ donc B' est une base de E .

3) $g \in C(f)$.

a) $g(v) \in E$ et $B' = (v, \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de E donc $\exists ! (a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$ tel que

$$g(v) = a_0 v + a_1 f(v) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(v) \\ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(v).$$

b) $h = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \in \mathcal{L}(E)$.

soit $k \in \mathbb{N}$. $h(f^k(v)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(f^k(v))$: il faut changer l'indice

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{i+k}(v)$$

$$= f^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v) \right)$$

$$= f^k(g(v))$$

on $g \circ f = f \circ g$ donc $f^k \circ g = g \circ f^k$.

$$d'au \quad h(f^k(\alpha)) = g(f^k(\alpha)).$$

$$c) \quad h(f^k(\alpha)) = g(f^k(\alpha)) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{En particulier } h(f^k(\alpha)) = g(f^k(\alpha)) \quad \forall k \in [0, n-1].$$

$$\text{Or } P = (f^k(\alpha))_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est une base de } E$$

$$\text{donc } g = h = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$$

$$4) g \circ f^k = f^k \circ g \quad \forall k \in [0, n-1].$$

$$\Rightarrow f^k \in C(f) \quad \forall k \in [0, n-1].$$

$$\text{donc } \text{vect}(f^k)_{0 \leq k \leq n-1} \subset C(f).$$

$$\text{de plus } \forall g \in C(f); \exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$$

$$\text{t.q. } g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \in \text{vect}(f^k)_{0 \leq k \leq n-1}$$

$$\text{donc } C(f) = \text{vect}(f^k)_{0 \leq k \leq n-1} = K_{n-1}[f].$$

$$b) \quad C(f) = \text{vect}(f^k)_{0 \leq k \leq n-1}$$

$$\text{de plus } (f^k)_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est une famille libre}$$

$$\text{de } \mathcal{L}(E) \quad (\text{d'après III. 1. c})$$

$$\text{donc } (f^k)_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est une base de } C(f)$$

$$\text{et } \dim C(f) = n$$