

Devoir d'Algèbre - Semestre N°1
Sections : M.P.2

Durée : 1h

Date : 2 Novembre 2019

Nbre de pages : 1

Exercice 1

On désigne par $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif non réduit à $\{0_A\}$.

1. Montrer que si A est intègre et fini alors A est un corps.
2. Montrer que A est un corps si et seulement si $\{0_A\}$ et A sont les seuls idéaux de A .

Exercice 2

On désigne par $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e .

1. Montrer que si $x^2 = e$, pour tout $x \in G$, alors G est abélien.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence :

G est cyclique d'ordre $n \iff G$ est d'ordre n et il existe $a \in G$ d'ordre n

- (b) Dédurre que tout groupe d'ordre premier est cyclique.
- (c) Montrer que tout groupe d'ordre $n \leq 5$ est abélien.
- (d) Donner un groupe d'ordre 6, non abélien.

Dans toute la suite, on suppose que G est d'ordre fini $n \geq 1$ et que $x^2 = e$, $\forall x \in G$.
(G est donc abélien).

3. Soit H un sous groupe de G .

Pour tout $a \in G$, on note $aH = \{ah, h \in H\}$, et $H_a = H \cup aH$.

- (a) Montrer que $f_a : H \rightarrow aH$ est une bijection de H sur aH .
 - (b) Déterminer H_a lorsque $a \in H$.
 - (c) Montrer que si $a \notin H$ alors H_a est un sous groupe de G d'ordre $2|H|$.
4. On note $G = \{e, u_2, \dots, u_n\}$. $G_1 = \{e\}$ et $G_{i+1} = G_i \cup u_{i+1}G_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
 - (a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, G_i est un sous groupe de G d'ordre 2^{n_i} , $n_i \in \mathbb{N}$.
 - (b) Justifier que $G_n = G$.
 - (c) Dédurre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k$.