

Examen d'Algèbre N°1

Section : MP 2

Durée : 2h

Date : Janvier 2020

Nbre de pages : 3

Exercice :

Soit G un sous-groupe fini de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $A \in G$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Justifier que, pour toute matrice A de G , $A^m = I_n$.
- Soit $A \in G$. On désigne par λ une valeur propre réelle de A et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que $AV = \lambda V$.
 - Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k V = \lambda^k V$.
 - Déduire que $\lambda^m = 1$.
 - Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$.
- Montrer que, pour toute matrice A de G , $A^2 = I_n$.
 - Déduire que G est abélien.

Problème :

Comme de coutume, on note par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Par ailleurs, on désigne par f un endomorphisme de E .

Notations :

- ◊ $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) ; g \circ f = f \circ g\}$.
- ◊ f est dite homothétie s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{id}_E$.
- ◊ f est dit nilpotent d'indice de nilpotence $q \in \mathbb{N}^*$ si $f^q = \tilde{0}$ et $f^{q-1} \neq \tilde{0}$.

Partie I :

- Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$.
- On suppose dans cette question que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
 - Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
 - Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_1 + e_2 + \dots + e_n) = \lambda(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$.
 - Déduire que $f = \lambda \text{id}_E$.

3. On suppose dans cette question que f n'est pas une homothétie.

(a) Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $(x_1, f(x_1))$ soit libre.

On note $x_2 = f(x_1)$.

(b) Soit $\mathcal{B}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une base de E qui complète (x_1, x_2) .

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\begin{cases} g(x_1) = x_1, \\ g(x_i) = 0_E, \forall i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

i. Déterminer $f \circ g(x_1)$ et $g \circ f(x_1)$.

ii. Dédire que $g \notin \mathcal{C}(f)$.

4. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$, si et seulement si, f est une homothétie.

Partie II :

Dans cette partie, on suppose que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. (a) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}_0 = (v_1, \dots, v_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(v_i) = \lambda_i v_i$.

(b) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $E_{\lambda_i}(f) = \text{Vect}(v_i)$.

2. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$ et $i \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Montrer que $g(v_i) \in E_{\lambda_i}(f)$.

(b) Dédire qu'il existe $\beta_i \in \mathbb{K}$ tel que $g(v_i) = \beta_i v_i$.

3. (a) Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$, si et seulement si, la matrice de g selon $\mathcal{B}_0$ est diagonale.

(b) Montrer que

$$\psi : \mathcal{C}(f) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; g \longmapsto \text{Mat}(g, \mathcal{B}_0)$$

est une application linéaire injective.

(c) Déterminer $\text{Im}(\psi)$ l'image de ψ .

(d) Dédire que $\dim \mathcal{C}(f) = n$.

Partie III :

Dans cette partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $q \geq 1$.

1. (a) Justifier l'existence d'un vecteur v de E tel que $f^{q-1}(v) \neq 0_E$.

(b) Montrer que la famille $(v, f(v), \dots, f^{q-1}(v))$ est libre de E . En déduire que $q \leq n$ et $f^n = \tilde{0}$.

(c) Montrer que la famille $(\text{id}_E, f, \dots, f^{q-1})$ est libre de $\mathcal{L}(E)$.

Dans toute la suite, on suppose que $q = n$.

2. Montrer qu'il existe v de E tel que $\mathcal{B}' = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de E .

3. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

- (a) Justifier qu'il existe un unique $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(v) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(v)$.

On pose $h = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

- (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h(f^k(v)) = g(f^k(v))$.

- (c) Dédurre que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

4. (a) Montrer que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(id_E, f, \dots, f^{n-1})$.

- (b) Dédurre que $\dim \mathcal{C}(f) = n$. (*Indication : On pourra utiliser la question III.1.c*)