
Devoir de contrôle n° 1

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.

Problème 1

On se donne une fonction f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et on se propose d'étudier la nature de convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t \, dt$.

1. Montrer que si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t \, dt$ converge.

2. On suppose dans cette question que f est décroissante et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(a) Pour $X > \pi$ et $N = E(\frac{X}{\pi})$, montrer que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\int_{N\pi}^X f(t) \sin t \, dt \right) = 0$.

(b) On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $U_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \sin t \, dt$. Montrer que $\sum_{k \geq 0} U_k$ est une série alternée qui converge vers un réel L .

(c) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t \, dt$ est convergente et converge vers L .

3. On suppose dans cette question que f est décroissante positive et non intégrable sur $[0, +\infty[$.

(a) Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \, dt \geq 2f((k+1)\pi)$.

(b) Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t) \, dt \leq \pi f((k+1)\pi)$.

(c) En déduire que l'application $t \mapsto \varphi(t) = f(t) \sin t$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Problème 2

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$ diverge et déduire que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
2. On pose $U_n = H_n - \ln n$ et $V_n = U_n - U_{n-1}$.
 - (a) Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} V_n$.
 - (b) En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. En remarquant que $\frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4. Soit $W_n = U_n - \gamma$.
 - (a) Établir que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} W_k - W_{k-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$.
 - (b) En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

BON TRAVAIL