
Devoir de contrôle n° 1

Problème

Définitions et notations

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass: si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

On désigne par E l'espace vectoriel des applications continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on le munit de la norme de la convergence uniforme

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \frac{1}{2}]$ à valeurs réelles.

Partie I

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , I_n existe.
2. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n , pour tout entier naturel n .
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel k , $\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin(x) dx = 0$.
5. Proposer une fonction f continue sur $[0, +\infty[$, non nulle et vérifiant que pour tout entier naturel k , $\int_0^{+\infty} u^k f(u) du = 0$.

Partie II

- (a) Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions bornées sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction bornée sur I .
(b) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par: $h(x) = \frac{1}{x}$.
Expliquer pourquoi h ne peut pas être uniformément approchée sur l'intervalle $]0, 1]$ par une suite de fonctions polynômes.
- (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ de degré inférieur ou égal à N .
Montrer que $\mathcal{P}_N$ est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Est-il un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
(b) Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné?
- On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

- (a) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : [0, \frac{1}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

- (b) En déduire que $\mathcal{P} = \left\{ P : \begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{2}] &\longrightarrow & \mathbb{R} \\ x &\longmapsto & P(x) \end{array} ; P \in \mathbb{R}[X] \right\}$ n'est pas un fermé de $(\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Partie III

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que pour tout entier naturel k ,

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0.$$

1. On considère l'application

$$\begin{aligned} \psi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

- (a) Montrer que ψ_f est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
(b) Vérifier que $\psi_f(P) = 0$, pour toute fonction polynôme P .
2. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, déduire que f est nécessairement la fonction nulle sur $[a, b]$.

Application

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. On note F le sous espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a, b]$ et on désigne par $F^\perp = \{g \in E; \varphi(g, f) = 0, \forall f \in F\}$.
 - (a) Montrer que $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de E .
 - (b) Déterminer $F^\perp$.
 - (c) A-t-on $E = F \oplus F^\perp$? (Indication: utiliser la partie III).

Exercice

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de $\sum_{n \geq 0} r_n$ où $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.

Pour $n \geq 1$, on considère $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

- (b) En déduire que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2. Montrer qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = L + 2$.

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 2\sqrt{n} - L$.

- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} v_{n+1} - v_n$ est convergente.

- (b) Déduire que $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

- (c) Déterminer un équivalent de $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

- (d) En déduire que

$$u_n = 2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{24n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

4. (a) Exprimer r_{2n} en fonction de u_n , u_{2n} et $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.

- (b) En déduire qu'il existe a, b tels que $r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

- (c) Exprimer S en fonction de L et trouver la nature de $\sum_{n \geq 0} r_n$.