

## Devoir de Synthèse de Mathématiques N°1

Section : MP 2

Durée : 3h

Date : Janvier 2021

Nbre de pages : 3

## Exercice :

On considère  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisables vérifiant  $MN = NM$ .

On note  $f_M$  et  $f_N$  les endomorphismes canoniquement associés à  $M$  et  $N$ .

- (a) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^n$  formée par des vecteurs propres communs à  $f_M$  et  $f_N$ .
- (b) Dédire qu'il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}MP$  et  $P^{-1}NP$  sont diagonales.

Dans toute la suite,  $G$  désigne un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall M \in G, M^2 = I_n.$$

2. Montrer que toute matrice  $A$  de  $G$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ .
3. Montrer que  $G$  est abélien.
4. On note

$$\Delta_n = \{\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall i \in \{1, \dots, n\} : \varepsilon_i^2 = 1\}.$$

- (a) Vérifier que  $\Delta_n$  est un sous-groupe d'ordre  $2^n$  de  $GL_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $D \in \Delta_n$ ,  $D^2 = I_n$ .
- (c) Montrer qu'il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  tel que

$$\forall A \in G, Q^{-1}AQ \in \Delta_n.$$

- (d) Dédire que  $\text{card}(G) \leq 2^n$ .
5. Soit  $m$  un entier naturel non nul.

On suppose qu'il existe un isomorphisme de groupes  $\phi$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  sur  $GL_m(\mathbb{R})$ .

- (a) Montrer que  $\phi(\Delta_n)$  est un sous-groupe de  $GL_m(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall A \in \phi(\Delta_n), A^2 = I_m.$$

- (b) Dédire que  $n = m$ .

## Problème :

Dans ce problème,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est dit :

- ◇ nilpotent s'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $f^m = \tilde{0}$ .
- ◇ nilpotent d'indice de nilpotence  $p \in \mathbb{N}^*$ , si  $f^{p-1} \neq \tilde{0}$  et  $f^p = \tilde{0}$ .
- ◇ cyclique s'il existe un vecteur  $v \in E$  tel que la famille  $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$  est une base de  $E$ .

En outre,  $\chi_f$  désigne le polynôme caractéristique de  $f$  et  $\Pi_f$  le polynôme minimal de  $f$ .

### Partie I : Endomorphisme cyclique et matrice compagnon

1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
  - (a) Montrer que  $M$  et  ${}^tM$  ont le même polynôme caractéristique.
  - (b) Montrer  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si, et seulement si,  ${}^tM$  l'est aussi.
2. On pose  $Q(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Montrer que  $\chi_{C_Q}(X) = Q(X)$ .

- (a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  ${}^tC_Q$ .  
Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
- (b) Dédire que  $C_Q$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si, et seulement si,  $Q$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et toutes ses racines sont simples.
3. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  
Montrer que  $f$  est cyclique si, et seulement si, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $C_Q$ , où  $Q$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .
4. Soit  $f$  un endomorphisme cyclique de  $E$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et toutes ses racines sont simples.
  - (b) Montrer que la famille  $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$  est libre de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (c) En déduire que  $\deg(\Pi_f) = n$  puis que  $\chi_f = \Pi_f$ .
  - (d) Retrouver le résultat de la question 4 - a.
5. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent d'indice de nilpotence  $p$ .
  - (a) Soit  $v$  un vecteur de  $E$  tel que  $f^{p-1}(v) \neq 0_E$ .  
Montrer que la famille  $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$  est libre de  $E$ . En déduire que  $p \leq n$ .
  - (b) Dédire que  $f$  est cyclique si, et seulement si,  $p = n$ .

## Partie II : Sous-espaces caractéristiques

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :

Il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{n_i},$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont les valeurs propres distinctes de  $f$  d'ordre  $n_1, \dots, n_m$  respectivement.

Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , on note  $E_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)$  et  $F_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{n_i}$ .

1. Justifier que  $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq m} F_i$ .

2. Soit  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

(a) Montrer que  $F_k$  est un sous-espace vectoriel de stable par  $f$  et que  $F_k$  contient  $E_k$ .

On note  $f_k$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F_k$ .

(b) Justifier que  $(f_k - \lambda_k \text{id}_{F_k})$  est nilpotent.

(c) On note  $P_k(X) = (X - \lambda_k)^{n_k}$ .

Montrer que  $P_k(f_k) = \tilde{0}$  et déduire que  $\text{Sp}(f_k) = \{\lambda_k\}$ .

(d) Montrer que  $\chi_{f_k}(X) = (X - \lambda_k)^{m_k}$ , où  $m_k = \dim(F_k)$ .

En déduire que  $m_k \leq n_k$ .

3. Montrer que, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\dim(F_i) = n_i$ .

4. Montrer que  $f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $F_k = E_k$ .