



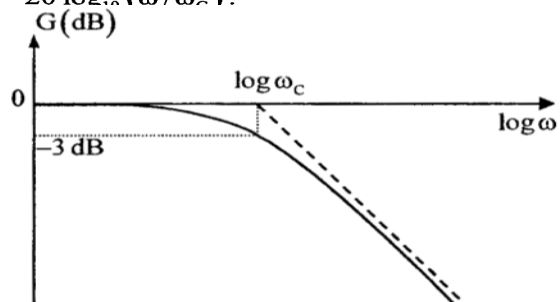
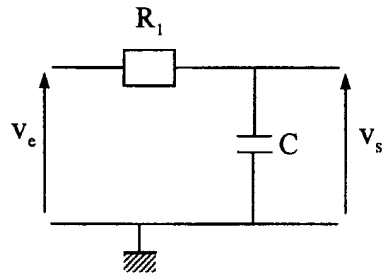
**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE
DE LA FIN DU PREMIER SEMESTRE**

MP2

FÉVRIER 2021

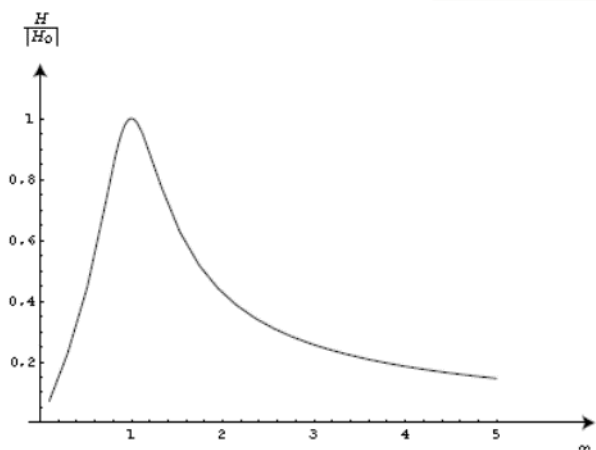
PROBLÈME 1 : (DC) 30 pts

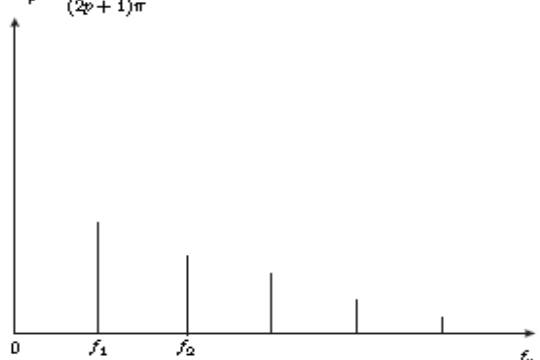
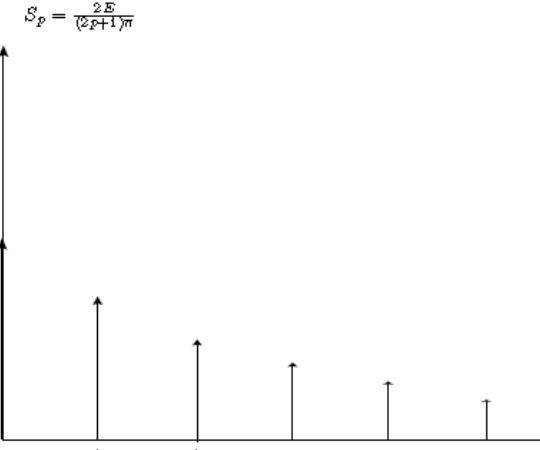
1.	En régime sinusoïdal, l'impédance complexe du condensateur s'écrit : $\underline{Z}_c = \frac{1}{j\omega C}$. A basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$) $\Rightarrow \underline{Z}_c \rightarrow +\infty$, le condensateur de capacité C est équivalent à un interrupteur ouvert. A hautes fréquences ($\omega \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow \underline{Z}_c \rightarrow 0$, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé. La tension de sortie entre ces bornes est donc nulle : $v_s(t) \rightarrow 0$. $\Rightarrow$ Ce circuit joue le rôle d'un filtre passe bas.	2
2.	En utilisant la relation diviseur de tension, on trouve en notation complexe : $\underline{v}_s = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c + R} \underline{v}_e = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} \underline{v}_e = \frac{1}{1 + j\omega CR} \underline{v}_e \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$ La quantité ωRC est sans unité. On pose $\omega_c = \frac{1}{RC}$; $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	1
3.	Le gain en décibel s'écrit : $G(\text{dB}) = 20 \log_{10} \underline{H}(j\omega) = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} = -10 \log_{10} (1 + (\omega/\omega_c)^2)$ • A très basse pulsation ($\omega \rightarrow 0$) on déduit que : $\underline{H}(j\omega) = 1 \Rightarrow G(\text{dB}) = G_{\text{max}} = 0$. • Si la pulsation de la tension d'entrée est égale à la pulsation ω_c, caractéristique du filtre ($\omega = \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) = 1/\sqrt{2} \Rightarrow G(\text{dB}) = -3 \text{ dB}$. • A très haute pulsation ($\omega \rightarrow \infty$) on déduit que : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega_c}{\omega} \Rightarrow G(\text{dB}) = -20 \log_{10} (\omega/\omega_c)$. Dans le dernier cas ($\omega \rightarrow \infty$), la courbe $G = f(\log_{10} \omega)$ est une droite de pente de -20 dB/décade et d'ordonnée à l'origine $20 \log_{10} \omega_c$. $\Rightarrow$ c'est un filtre de premier ordre	3



4.	La pulsation du coupure correspond au gain $G_{\max} - 3\text{dB} = -3\text{dB} \Rightarrow \omega = \omega_c$. <u>A.N :</u> $\omega_c = 1/RC = 2,510^5 \text{ rd s}^{-1}$ La bande passante de ce filtre est tel que : $G_{\max} - 3\text{dB} \leq G(\text{dB}) \leq G_{\max}$ $\Leftrightarrow \omega \in [0, \omega_0]$	1
5.	La fonction de transfert s'obtient à partir du diviseur de tension. L'impédance équivalente de la résistance R_2 et de la capacité C placée en parallèle est tel que : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R_2} + j\omega C$ $\Rightarrow Z = \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}$ $\underline{v_s} = \frac{Z}{Z + R_1} \underline{v_e} \Rightarrow \underline{H_1}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{Z}{Z + R_1} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega CR_1 R_2}$ On divise tous les membres par $R_1 + R_2 \Rightarrow \underline{H_1}(j\omega) = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$	1,5
6.	L'identification fournie : $H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ et $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$.	0,5
7.	L'ajout de la résistance R_2 modifie de gain statique $H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Ce gain est plus faible que celui en absence de la résistance R_2. Puisque si on R_2 supprime ($R_2 \rightarrow \infty$) $\Rightarrow H_0 \rightarrow 1$ De même la pulsation du coupure de ce filtre chargé, notée ω_0, est différente de celle d'un filtre $R_1 C$ non chargé. $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} > \frac{1}{R_1 C} = \omega_c$. La bande passante de ce filtre est : $[0, \omega_0]$; Elle est plus large que dans le cas d'un filtre non chargé. $\Rightarrow$ Un filtre RC relié à une charge est caractérisé par un gain statique plus faible. Sa bande passante est plus large.	2

8.	Puisqu'il s'agit d'un filtre passe bas, le gain est maximum pour les faibles pulsations. Si $\omega \ll \omega_0$, $\underline{H}_1(\omega) \approx H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. La pulsation de coupure est : $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$ <u>A.N :</u> * $H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}$ et $G(\text{dB}) = 20 \log_{10} \underline{H}_1(j\omega) = 20 \log_{10} H_0 = -6 \text{ dB}$ * $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = \frac{4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ rad s}^{-1}$	2
9.	- Aux basse fréquences ($\omega \rightarrow 0$) les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts, donc : $v_s \rightarrow v_B = 0 \text{ car } i^- = 0.$ - Aux hautes fréquences ($\omega \rightarrow +\infty$) les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs fermés, donc : $v_s \rightarrow v_A = v_B = 0$ - Conclusion : c'est un <u>filtre passe-bande</u>.	1
10.	- MILLMAN en A : $\underline{v}_A = \frac{\frac{v_s}{R_1} + jC\omega \underline{v}_B + jC\omega \underline{v}_s + \frac{0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + 2jC\omega + \frac{1}{R_2}}$ - puisque $v_B = 0$, alors : $\underline{v}_A = \frac{\frac{v_s}{R_1} + jC\omega \underline{v}_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega}$ - MILLMAN en B : $\underline{v}_B = \frac{jC\omega \underline{v}_A + \frac{v_s}{R_3}}{jC\omega + \frac{1}{R_3}}$ - puisque $v_B = 0$, il vient : $\underline{v}_s = -jC\omega R_3 \underline{v}_A$	2
11.	d'où : $-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega\right) \frac{v_s}{jC\omega R_3} = \frac{v_s}{R_1} + jC\omega \underline{v}_s$ $\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{R_1} \frac{1}{\left(\underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}_{=\frac{1}{R_1'}} + 2jC\omega\right) \frac{-1}{jC\omega R_3} - jC\omega}$ d'où : $\underline{H} = \frac{-\frac{R_3}{2R_1}}{1 - j\frac{1}{2R_1' C\omega} + j\frac{R_3 C\omega}{2}} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$	1,5

12.	- avec : $H_0 = -\frac{R_3}{2R_1}$ $Q = \sqrt{\frac{R_3}{4R'_3}}$ $\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_3R'_3}}$	1,5
13.	- Aux hautes fréquences ($x \gg 1$) : $\underline{H} \approx \frac{H_0}{jQx} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega}$: le montage à un caractère <u>intégrateur</u>. - Aux basses fréquences ($x \ll 1$) : $\underline{H} \approx \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega$: le montage à un caractère <u>dérivateur</u>. - Aux hautes fréquences ($\underline{H} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega}$) $\Rightarrow \underline{v_s} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{v_e}{j\omega} \Rightarrow v_s(t) = \frac{H_0\omega_0}{Q} \int v_e(t) dt + cte$ - Aux basses fréquences ($\underline{H} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega$) $\Rightarrow \underline{v_s} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega \underline{v_e} \Rightarrow v_s(t) = \frac{H_0}{Q\omega_0} \frac{dv_e(t)}{dt}$	2
14.	- Définition de la pulsation de coupure ω_c à -3 dB : $\underline{H}(\omega_c) = \frac{ \underline{H} _{\max}}{\sqrt{2}}$ - Calcul des ω_c : on a $\underline{H}_{\max} = H_0$ d'où : $\omega_{c1} = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right)$ $\omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right)$ - La largeur de la bande passante : $\Delta\omega = \omega_{c1} - \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{Q}$	1,5
15.	Application numérique : $\Delta f = 150 \text{ Hz}$	0,5
16.	- Le module de $\underline{H}$ est : $H(\omega) = \frac{ H_0 }{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$ - L'argument de $\underline{H}$ est : $\varphi(\omega) = \pi - \text{Arctan} \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$	2
17.	$H(\omega)$ est maximale si son dénominateur est minimal donc pour : $\omega = \omega'_0 = \omega_0$ Allure de $H(\omega)$: 	1

18.	• $f \in \text{BP} = \left[\frac{\omega_{a2}}{2\pi}, \frac{\omega_{a1}}{2\pi} \right] \Rightarrow \underline{v}_s = \underline{v}_e H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = E e^{j(\omega t - \pi/2)} H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$, d'où : $v_s = \text{Re}(\underline{v}_s) = \frac{E H_0 }{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \sin[2\pi f t + \varphi(\omega)]$ et puisque $f = f_0$: $v_s = E H_0 \sin[2\pi f t + \pi] = -E H_0 \sin(2\pi f t)$	1
19.	- Le signal possède une <u>composante continue</u> $E/2$ - La partie variable est <u>impaire</u> donc en <i>sinus</i>	1
20.	$S_p = \frac{2E}{(2p+1)\pi}$ 	1
21.	$f_0 = f \in \text{BP}$ c'est la seule fréquence qui passe ($p = 0$), donc : $v_s(t) = \frac{2E H_0 }{\pi} \sin[2\pi f t + \varphi(f)] = -\frac{2E H_0 }{\pi} \sin(2\pi f t)$ $S_p = \frac{2E}{(2p+1)\pi}$ 	1

PROBLÈME 2 : Étude d'une cavité électromagnétique (EFS) - 70 pts

A- Modes propres d'une cavité sans pertes – 23 pts

1.	Équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charge et de courant $\left \begin{array}{ll} \text{div} \vec{E} = 0 & \text{M.G.} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{M.F.} \end{array} \right \quad \left \begin{array}{ll} \text{div} \vec{B} = 0 & \text{M.}\Phi. \\ \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{M.A.} \end{array} \right $	4
2.	Équation de propagation relative à $\vec{E}$ $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ En injectant $\vec{E}$ dans l'équation de propagation, on obtient : $k = \pm \frac{\omega}{c}$ Ces deux solutions mathématiques correspondent à la même solution physique. On peut retenir seulement la solution $k = \frac{\omega}{c}$	4
3.	Le champ électrique proposé est tangent aux conducteurs. Il doit être nécessairement continu. Comme il est nul dans un conducteur parfait, on aura : $\vec{E}(0, t) = \vec{E}(L, t) = \vec{0}$	2
4.	Les deux conditions précédentes amènent à : $\underline{E}_1 + \underline{E}_2 = 0$ et $\underline{E}_1 e^{-jkL} + \underline{E}_2 e^{jkL} = 0$. On a donc $\underline{E}_2 = -\underline{E}_1$ et $\underline{E}_2 (e^{jkL} - e^{-jkL}) = 0$. La deuxième égalité entraîne $\sin kL = 0$ d'où $k_n L = n\pi$; $n \in \mathbb{N}^*$ Puisqu'on est dans le vide : $k_n = \frac{2\pi f_n}{c}$, cela permet d'obtenir les fréquences propres de la cavité : $f_n = n \frac{c}{2L} = n f_1$ où $f_1 = \frac{c}{2L}$ est la fréquence du mode fondamental.	3
5.	$\vec{E}_n = \underline{E}_1 e^{j(\omega_n t - k_n x)} \vec{e}_z + \underline{E}_2 e^{j(\omega_n t + k_n x)} \vec{e}_z$ Avec $\left \begin{array}{l} \underline{E}_2 = -\underline{E}_1 \\ \omega_n = 2\pi f_n = n \frac{\pi c}{L} \\ k_n = n \frac{\pi}{L} \end{array} \right$ D'où $\vec{E}_n = \underline{E}_1 e^{j\frac{\pi c}{L} t} \left(e^{-jn\frac{\pi}{L} x} - e^{jn\frac{\pi}{L} x} \right) \vec{e}_z = -2j \underline{E}_1 e^{j\frac{\pi c}{L} t} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \vec{e}_z$	3
6.	L'onde est stationnaire car les variables x et t sont séparées. Il n'y a pas de termes en $x \pm ct$ caractérisant le phénomène de propagation.	2
7.	Le champ électrique est constamment nul lorsque $\sin\left(n\pi \frac{x_p}{L}\right) = 0$, c'est-à-dire $x_p = p \frac{L}{n}$. La distance entre deux valeurs consécutives de x_p est : $x_{p+1} - x_p = \frac{L}{n} = \frac{\lambda_n}{2}$	2
8.	D'après l'équation de Maxwell – Faraday $\text{rot} \vec{E}_n = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t}$. En régime sinusoïdal permanent, elle se traduit par : $\frac{\partial}{\partial x} (\vec{e}_x \wedge \underline{E}_n \vec{e}_z) = -\frac{\partial \underline{E}_n}{\partial x} \vec{e}_y = -j\omega_n \underline{B}_n \Rightarrow \underline{B}_n = 2 \frac{\underline{E}_1}{c} e^{j\frac{\pi c}{L} t} \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \vec{e}_y$	3

	Le champ magnétique est constamment nul lorsque $\cos\left(n\pi \frac{x'_p}{L}\right) = 0$ $\Rightarrow x'_p = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{L}{n}$. La distance qui les sépare est : $x'_{p+1} - x'_p = \frac{L}{n} = \frac{\lambda_n}{2}$	
--	---	--

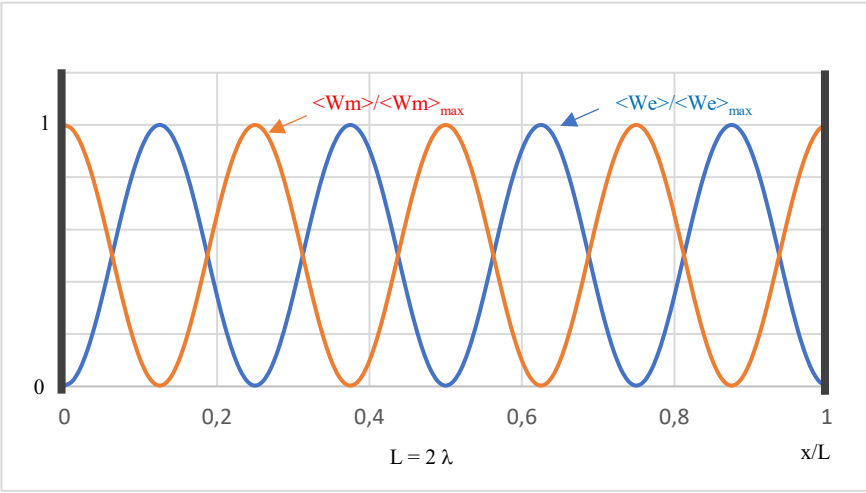
B- Calcul du champ électromagnétique intra-cavité – 15 pts

9.	L'onde a subi une transmission et 2m réflexions. Elle se propage suivant $\vec{e}_x$. Son amplitude est affectée du coefficient $\sqrt{T}(-\sqrt{R})^{2m}$. Par rapport à l'onde incidente, elle a parcouru une distance supplémentaire 2mL. L'amplitude du champ électrique est : $\underline{E}_{2m}(x, t) = \sqrt{T}(-\sqrt{R})^{2m} E_0 e^{j(\omega t - k(x + 2mL))} = \sqrt{T} R^m E_0 e^{-j2mkL} e^{j(\omega t - kx)}$	2
10.	L'onde ayant subi 2m+1 réflexions se propage dans le sens de $-\vec{e}_x$. Son amplitude est affectée du coefficient $\sqrt{T}(-\sqrt{R})^{2m+1}$. Par rapport à l'onde incidente, elle a parcouru une distance supplémentaire $(2m+1)L + (L-x)$. L'amplitude du champ électrique est : $\underline{E}_{2m+1}(x, t) = \sqrt{T}(-\sqrt{R})^{2m+1} E_0 e^{j(\omega t - k((2m+1)L + (L-x)))} = -\sqrt{T}\sqrt{R} R^m E_0 e^{-j(2m+1)kL} e^{j(\omega t + k(x-L))}$	2
11.	Le champ électrique de l'onde se propageant dans le sens de $\vec{e}_x$ est la somme des champs $\underline{E}_{2m}$ avec m varie de 0 à l'infini : $\underline{E}_{(+)}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{E}_{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{T} R^m E_0 e^{-j2mkL} e^{j(\omega t - kx)}$ $\Rightarrow \underline{E}_{(+)}(x, t) = \sqrt{T} E_0 \frac{1}{1 - R e^{-j2kL}} e^{j(\omega t - kx)}$ De même, le champ électrique de l'onde se propageant dans le sens de $-\vec{e}_x$ est la somme des champs $\underline{E}_{2m+1}$ avec m varie de 0 à l'infini : $\underline{E}_{(-)}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{E}_{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} -\sqrt{T}\sqrt{R} R^m E_0 e^{-j(2m+1)kL} e^{j(\omega t + k(x-L))}$ $\Rightarrow \underline{E}_{(-)}(x, t) = -\sqrt{T}\sqrt{R} E_0 \frac{1}{1 - R e^{-j2kL}} e^{j(\omega t + k(x-2L))}$ En $x = L$; $\underline{E}_{(-)}(x, t) = -\sqrt{R} \underline{E}_{(+)}(x, t)$ l'onde qui se propage dans le sens des x positifs ($\underline{E}_{(+)}$) subit une réflexion en $x = L$ pour donner une onde qui se propage dans le sens des x négatifs ($\underline{E}_{(-)}$). d'où le rapport de leur amplitudes complexes est égal à $-\sqrt{R}$.	4
12.	Le champ électrique de l'onde résultante est : $\underline{E}_z = \underline{E}_{(+)} + \underline{E}_{(-)} = \sqrt{T} E_0 \frac{1}{1 - R e^{-j2kL}} e^{j(\omega t - kx)} - \sqrt{T}\sqrt{R} E_0 \frac{1}{1 - R e^{-j2kL}} e^{j(\omega t + k(x-2L))}$ $\Rightarrow \underline{E}_z = E_0 e^{j\omega t} \sqrt{T} \frac{e^{-jkx} - \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}} = E_0 e^{j\omega t} \underline{H}(k, x, L)$ avec $\underline{H} = \sqrt{T} \frac{e^{-jkx} - \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}}$	2

13.	D'après l'équation de Maxwell – Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}$. $\Rightarrow j\omega \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \vec{e}_y = -jkE_0 e^{j\omega t} \sqrt{T} \frac{e^{-jkx} + \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}} \vec{e}_y$ $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \vec{e}_y = -\frac{E_0}{c} \sqrt{T} \frac{e^{-jkx} + \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}} e^{j\omega t} \vec{e}_y$	3
14.	$\underline{E}_{\text{transmis}}(L, t) = \sqrt{T} \underline{E}_{(+)}(L, t) = TE_0 \frac{1}{1 - R e^{-j2kL}} e^{j(\omega t - kL)}$	2

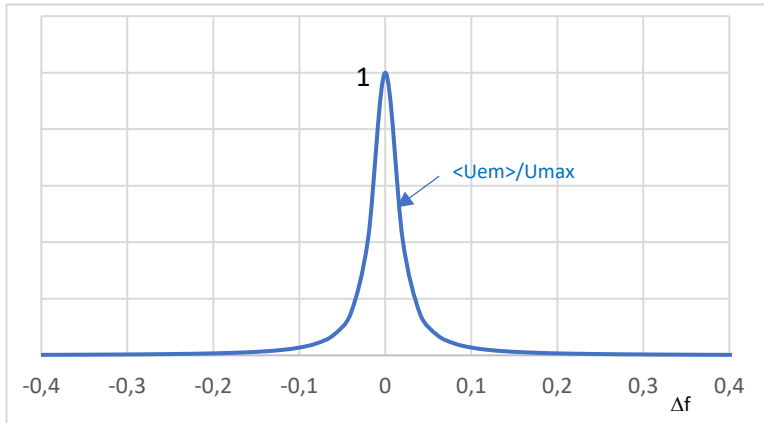
C- Répartition de l'énergie à fréquence fixée – 15 pts

15.	La densité volumique d'énergie électrique est : $w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ La densité volumique d'énergie électrique moyenne est : $\langle w_e(x) \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\underline{E} \cdot \underline{E}^*) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} T \text{Re} \left(\frac{e^{-jkx} - \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}} \frac{e^{jkx} - \sqrt{R} e^{-jk(x-2L)}}{1 - R e^{j2kL}} \right)$ $\Rightarrow \langle w_e(x) \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} T \text{Re} \left(\frac{e^{-jkx} - \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}} \frac{e^{jkx} - \sqrt{R} e^{-jk(x-2L)}}{1 - R e^{j2kL}} \right)$ $\Rightarrow \langle w_e(x) \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} T \frac{1 + R - 2\sqrt{R} \cos(2k(x-L))}{1 + R^2 - 2R \cos(2kL)}$	3
16.	La densité volumique d'énergie électrique moyenne est maximale pour : $\cos(2k(x_{\text{max}} - L)) = -1 \Rightarrow x_{\text{max}} = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} + L = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} + L ; p \in \mathbb{Z}_-$ Les minimums de la densité volumique d'énergie moyenne sont obtenus pour : $\cos(2k(x_{\text{min}} - L)) = 1 \Rightarrow x_{\text{min}} = p \frac{\pi}{k} + L = p \frac{\lambda}{2} + L ; p \in \mathbb{Z}_-$ La distance séparant deux maximums, comme celle séparant deux minimums, est égale à une demi-longueur d'onde. Ce qui correspond au résultat obtenu à la question 7	2
17.	La densité volumique d'énergie magnétique est : $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ La densité volumique d'énergie magnétique moyenne est : $\langle w_m(x) \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \text{Re}(\underline{B} \cdot \underline{B}^*) = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} T \text{Re} \left(\frac{e^{-jkx} + \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}} \frac{e^{jkx} + \sqrt{R} e^{-jk(x-2L)}}{1 - R e^{j2kL}} \right)$ $\Rightarrow \langle w_m(x) \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} T \text{Re} \left(\frac{1 + R + \sqrt{R} (e^{j2k(x-L)} + e^{-j2k(x-L)})}{1 + R^2 - R (e^{j2kL} + e^{-j2kL})} \right)$ $\Rightarrow \langle w_m(x) \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} T \text{Re} \left(\frac{1 + R + 2\sqrt{R} \cos(2k(x-L))}{1 + R^2 - R \cos(2kL)} \right)$ On constate immédiatement que les minimums d'énergie magnétique moyenne correspondent aux maximums d'énergie électrique moyenne et le réciproque est vrai.	2
18.	$\langle w_e(x) \rangle$ présente un minimum sur les deux miroirs si et seulement si :	2

	$\cos(2kL) = 1 \Rightarrow kL = p\pi \Rightarrow L = p \frac{\lambda}{2} \text{ où } p \in \mathbb{N}^*$ 	
19.	La densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne est : $\langle w_{em} \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} T \frac{1+R}{1+R^2 - 2R \cos 2kL}$ Cette valeur moyenne est indépendante de x. L'énergie électromagnétique moyenne dans la cavité est : $\langle U_{em} \rangle = \langle w_{em} \rangle SL = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} SL T \frac{1+R}{1+R^2 - 2R \cos 2kL} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} SL \frac{1-R^2}{1+R^2 - 2R \cos 2kL}$	2
20.	Le vecteur de Poynting est donné par : $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ Soit en valeur moyenne : $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$ $\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} T \text{Re} \left(\frac{e^{-jkx} - \sqrt{R} e^{jk(x-2L)}}{1 - R e^{-j2kL}} \frac{e^{jkx} + \sqrt{R} e^{-jk(x-2L)}}{1 - R e^{+j2kL}} \right) \vec{e}_x$ $\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} T \text{Re} \left(\frac{1 - R - \sqrt{R} (e^{j2k(x-L)} - e^{-j2k(x-L)})}{1 + R^2 - R(e^{j2kL} + e^{-j2kL})} \right) \vec{e}_x$ $\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} T \text{Re} \left(\frac{1 - R - 2j\sqrt{R} \sin(2k(x-L))}{1 + R^2 - 2R \cos(2kL)} \right) \vec{e}_x$ $\Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2kL)} \vec{e}_x$ Dans le cas du résonance ($\cos(2kL) = 1$) ; $\langle \vec{\pi} \rangle = c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_x$ qui est égal à celui de l'onde incidente. Par conséquent, la cavité est transparente à l'onde électromagnétique à une fréquence propre f_n.	2
21.	À une fréquence propre; ($\cos(2kL) = 1$) : Donc $\ \langle \vec{\pi} \rangle\ = c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = c \frac{\langle U_{em} \rangle}{SL} \frac{1-R}{1+R}$	1
22.	Le flux du vecteur de Poynting à travers S représente la puissance qui rentre dans la	1

	cavité. Au bout de la durée τ_e, l'énergie moyenne qui rentre dans la cavité est $\ \langle \vec{\pi} \rangle\ S \tau_e$ Cette énergie est égale à l'énergie électromagnétique moyenne dans la cavité en régime permanent si : $\langle U_{em} \rangle = \ \langle \vec{\pi} \rangle\ S \tau_e \Rightarrow \langle U_{em} \rangle = c \frac{\langle U_{em} \rangle}{SL} \frac{1-R}{1+R} S \tau_e \Rightarrow \tau_e = \frac{1+R}{1-R} \frac{L}{c}$	
--	---	--

D- Structure fine des pics de résonance – 17 pts

23.	On a $\langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} SL \frac{1-R^2}{1+R^2-2R \cos 2kL}$ $\langle U_{em} \rangle$ passe par un maximum lorsque $\cos 2k_p L = 1 \Rightarrow k_p L = p\pi \Rightarrow f_p = p \frac{c}{2L}$ Ces fréquences sont identiques à celles obtenues à la question 4.	2
24.a.	On a $\langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} SL \frac{1-R^2}{1+R^2-2R \cos 2kL}$ Or $2kL = 2 \frac{2\pi f}{c} L = 2\pi f \frac{2L}{c} = 2\pi \frac{f}{f_1}$ avec $f_1 = \frac{c}{2L}$ $\Rightarrow \cos 2kL = \cos \left(2\pi \frac{f}{f_1} \right) = \cos \left(2\pi \frac{f_1 + \Delta f}{f_1} \right) = \cos \left(2\pi \frac{\Delta f}{f_1} \right) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(2\pi \frac{\Delta f}{f_1} \right)^2$ Donc $\langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} SL \frac{1-R^2}{(1-R)^2 + 4\pi^2 R \left(\frac{\Delta f}{f_1} \right)^2} = \frac{\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} SL \frac{1+R}{1-R}}{1 + \frac{4\pi^2 R}{(1-R)^2} \left(\frac{\Delta f}{f_1} \right)^2}$ $\Rightarrow \langle U_{em} \rangle = \frac{U_{MAX}}{1 + 4F^2 \left(\frac{\Delta f}{f_1} \right)^2} \text{ avec } U_{MAX} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} SL \frac{1+R}{1-R} \text{ et } F = \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R}$	2
24.b.	$\langle U_{em} \rangle = \frac{U_{MAX}}{1 + 4F^2 \left(\frac{\Delta f}{f_1} \right)^2} = \frac{U_{max}}{2} \Rightarrow 2F \left(\frac{\Delta f}{f_1} \right) = \pm 1 \Rightarrow \Delta f = \pm \frac{f_1}{2F}$ 	3
24.c.	R est voisin de l'unité $\Rightarrow F \gg 1$. Le domaine de fréquences où se situe l'énergie est très étroit, ce qui justifie la dénomination de finesse pour F.	1
25.a.	En régime sinusoïdal forcé, l'intensité est donnée par :	2

	$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{r + j/\Omega + \frac{1}{jC\Omega}} = \frac{e_0 / r}{1 + jQ \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)} \exp(j\Omega t)$	
25.b.	L'énergie moyenne stockée dans la bobine : $\langle E_{\text{bobine}} \rangle = \frac{1}{4} l \operatorname{Re}(\underline{i} \cdot \underline{i}^*) = \frac{le_0^2}{4r^2} \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^2}$ La différence de potentiel entre les bornes du condensateur est : $\underline{u}_{\text{cond}} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = \frac{\underline{i}}{jC\Omega}$ L'énergie moyenne stockée dans le condensateur est : $\langle E_{\text{cond}} \rangle = \frac{1}{4} C \operatorname{Re}(\underline{u}_{\text{cond}} \cdot \underline{u}_{\text{cond}}^*) = \frac{1}{4C\Omega^2} \operatorname{Re}(\underline{i} \cdot \underline{i}^*) = \frac{e_0^2}{4Cr^2\Omega^2} \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^2}$	2
25.c.	Pour des fréquences voisines de la fréquence de résonance, on a $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 \ll \Omega_0$ Ainsi : L'énergie moyenne stockée dans la bobine $\langle E_{\text{bobine}} \rangle = \frac{le_0^2}{4r^2} \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega\Omega_0} \right)^2} \approx \frac{le_0^2}{4r^2} \frac{1}{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right)^2} = \frac{le_0^2}{4r^2} \frac{1}{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2}$ L'énergie moyenne stockée dans le condensateur $\langle E_{\text{cond}} \rangle = \frac{e_0^2}{4Cr^2\Omega^2} \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^2} \approx \frac{e_0^2}{4Cr^2\Omega_0^2} \frac{1}{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right)^2}$ $\Rightarrow \langle E_{\text{cond}} \rangle \approx \frac{le_0^2}{4r^2} \frac{1}{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2} = \langle E_{\text{bobine}} \rangle$ L'énergie moyenne dans le circuit est : $\Rightarrow \langle E_{\text{circuit}} \rangle = \langle E_{\text{bobine}} \rangle + \langle E_{\text{cond}} \rangle = \frac{le_0^2}{2r^2} \frac{1}{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2} = \frac{E_{\text{max}}}{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2}$	2
25.d.	L'analogie au facteur de qualité du circuit est la finesse de la cavité.	1
26.a.	La cavité est en configuration résonante si $\langle U_{\text{em}} \rangle \geq U_{\text{max}} / 2$ $ f - f_n \leq \frac{f_1}{2F} \Rightarrow -\frac{f_1}{2F} \leq f - f_n \leq \frac{f_1}{2F} \Rightarrow \left(n - \frac{1}{2F} \right) \leq \frac{f}{f_1} \leq \left(n + \frac{1}{2F} \right)$ $\Rightarrow \left(n - \frac{1}{2F} \right) \frac{\lambda}{2} \leq L \leq \left(n + \frac{1}{2F} \right) \frac{\lambda}{2}$	1
26.b.	La tolérance sur la distance l est : $\Delta L = L - L_n = \frac{\lambda}{4F}$ R est voisin de 1. Si on prend comme valeur $R \approx 0,999$, on obtient $F \approx 3140$	1

	Dans le domaine visible : $\Delta L = \frac{\lambda}{4F} \approx 4.10^{-11} \text{ m}$ On ne peut pas atteindre cette précision dans la pratique	
--	---	--