



**ÉPREUVE DE PHYSIQUE
DE LA FIN DU PREMIER SEMESTRE**

MP2

02 FÉVRIER 2021

Durée : 4h

PROBLÈME 1 : (DC)

I- On applique entre les bornes du circuit représenté sur la figure 1 une tension sinusoïdale, de pulsation ω variable, imposée par un générateur : $v_e(t) = V_e \cos(\omega t)$, où V_e est l'amplitude de la tension d'entrée.

La tension de sortie $v_s(t)$ représente la réponse forcée de ce circuit. Elle s'écrit sous la forme : $v_s(t) = V_s(\omega) \cos(\omega t - \varphi)$.

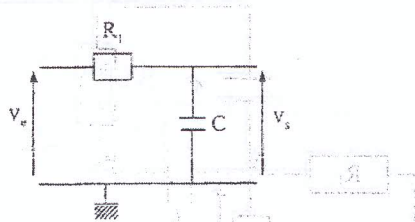


Figure 1

1- Préciser le comportement du condensateur à très basse et à très haute fréquence. En déduire la nature de ce filtre.

2- Déterminer la fonction de transfert complexe $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$

3- Tracer l'allure du diagramme de Bode du gain en Décibel

4- Déterminer la bande passante de ce filtre à $-3dB$ pour $C = 10nF$ et $R_1 = 4k\Omega$.

Ce filtre est chargé par une résistance R_2 branchée aux bornes du condensateur C .

5- Déterminer la fonction de transfert de ce filtre. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$H_1(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

6- Exprimer H_0 et ω_0 en fonction de R_1 , R_2 et C .

7- Quel est l'effet de l'ajout de la résistance R_2 sur le gain maximal et sur la bande passante du filtre ? Conclure.

8- On choisit $R_2 = R_1$. Calculer le gain maximal (en dB) ainsi que la bande passante de ce filtre. On donne $C = 10\text{nF}$ et $R_1 = 4\text{k}\Omega$.

II- Dans cette partie on étudie un filtre à structure de Rauch.

À chaque grandeur sinusoïdale : $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$, on associe le complexe $\underline{x}(t) = X\exp[j(\omega t + \varphi)]$.

On considère le circuit à amplificateur opérationnel de la figure 2. L'amplificateur opérationnel est alimenté par une source de tension symétrique (non représenté) $\pm V_{cc} = \pm 15\text{V}$. Le cas échéant, les tensions de saturations seront aussi $\pm V_{sat} = \pm 15\text{V}$.

Dans cette partie, on suppose que l'amplificateur opérationnel est parfait ($i^+ = i^- = 0$) et fonctionne en régime linéaire (la patte (-) est reliée à la sortie (réaction négative)) et que le signal v_e appliqué à l'entrée du circuit est sinusoïdal de pulsation ω .

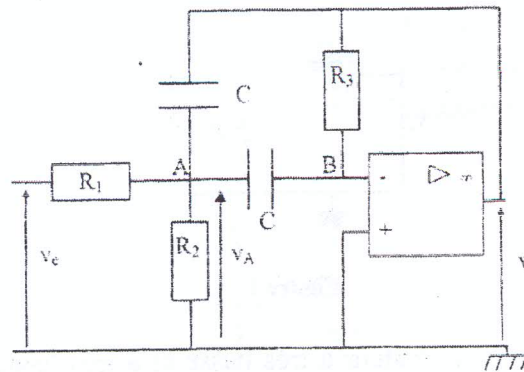


Figure 2

9- Etudier le comportement asymptotique du montage aux basses fréquences, puis aux hautes fréquences et déduire la nature du filtre.

10- Déduire deux relations entre $\underline{v_e}$, $\underline{v_A}$ et $\underline{v_s}$.

11- Montrer que la fonction de transfert du circuit s'écrit sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

12- Exprimer H_0 , Q et ω_0 en fonction de R_1 , R_3 , $R_3' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ et C .

13- Dans quel domaine de fréquence ce circuit présente-t-il un caractère intégrateur ? dérivateur ? Exprimer $v_s(t)$ en fonction de $v_e(t)$ dans chacun des deux cas.

14- Définir, puis calculer les fréquences de coupure à $-3dB$ en fonction de Q et ω_0 . En déduire la largeur de la bande passante du filtre.

15- Application numérique : on donne $H_0 = -1$, $Q = 20$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3kHz$

Calculer la largeur de la bande passante en fréquence du filtre.

16- On pose $\underline{H} = H(\omega)\exp(j\varphi(\omega))$, déterminer le module $H(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert.

17- Montrer que $H(\omega)$ passe par un maximum pour une valeur ω_0' de ω que l'on exprimera. Tracer l'allure de $H(\omega)$.

18- On applique à l'entrée du montage de la figure 2, un signal $v_e(t)$ de fréquence $f = 3kHz$ et d'amplitude $E = 5V$.

Le signal appliqué est donné par : $v_e(t) = E \sin(2\pi ft)$. En tenant compte des caractéristiques numériques du filtre (donné en 16), donner l'expression de $v_s(t)$ obtenu en sortie du circuit.

19- Le signal appliqué est un signal en créneau (figure 3) dont on donne le développement en série de Fourier :

$$v_e(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2E}{(2p+1)\pi} \sin[2\pi(2p+1)ft]$$

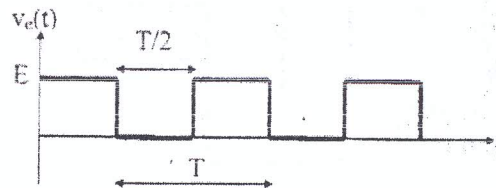


Figure 3

20- Justifier, sans calcul ce développement.

21- Donner l'allure du spectre en fréquence du signal $v_e(t)$.

22- En tenant compte des caractéristiques numériques du filtre, donner l'expression du signal $v_s(t)$ observé en sortie du circuit.

Décrire en quelques lignes comment pourrait-on utiliser le circuit de la figure 2 pour déterminer le spectre en fréquence du signal $v_e(t)$. Tracer ce spectre.

PROBLÈME 2 : Étude d'une cavité électromagnétique (EFS)

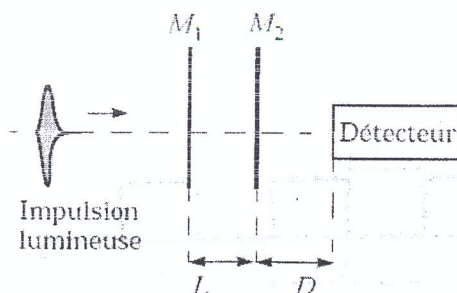
Les miroirs à pouvoir réflecteur élevé, qui renvoie plus de 99 % de l'énergie incidente, sont le fruit d'une haute technologie mis au point au départ pour des expériences d'électrodynamique en cavité ou de détection d'ondes gravitationnelles. Ces miroirs sont des lames planes hautement réfléchissantes mais aussi partiellement transparentes. On définit pour un miroir le coefficient de réflexion en puissance (ou en énergie) R par :

$$R = \frac{\text{Puissance réfléchie}}{\text{Puissance incidente}}$$

et le coefficient de transmission en puissance (ou en énergie) T par

$$T = \frac{\text{Puissance transmise}}{\text{Puissance incidente}}$$

Comme R est très voisin de l'unité, sa mesure nécessite des procédures expérimentales très spécifiques. Pour former une cavité de longueur L , les expérimentateurs associent deux miroirs plans parallèles identiques M_1 et M_2 (on note S la surface utile et R le coefficient de réflexion). Une source laser éclaire cette cavité, la lumière transmise étant intégralement reçue par un capteur adapté à cet usage. On se limite, dans tout le problème, au cas d'une incidence normale et on note Oyz le plan qui contient le miroir M_1 . La durée de traversée des deux miroirs sera négligée devant les autres temps de propagation. L'ensemble du dispositif expérimental est placé dans un milieu caractérisé par les constantes ϵ_0 et μ_0 . On note c la célérité de la lumière dans le vide.



A- Modes propres d'une cavité sans pertes

Une cavité sans pertes d'axe Ox et de longueur L est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans $x = 0$ et $x = L$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée selon $\vec{e}_z$ a pour représentation complexe

$$\vec{E}(x, t) = \underline{E}_1 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z + \underline{E}_2 e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z$$

1 - Écrire les quatre équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charge et de courant.

- 2 - Déterminer l'équation de propagation relative au champ $\vec{E}(x, t)$ à l'intérieur de la cavité. Déduire une relation entre k et ω .
- 3 - Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence d'un métal parfait en $x = 0$ et en $x = L$?
- 4 - En déduire $\vec{E}_2$ en fonction de $\vec{E}_1$ et la suite f_n des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité. On exprimera f_n en fonction de l'entier naturel n non nul et d'une fréquence particulière f_1 dépendant de L et de c . Ces fréquences propres correspondent aux modes propres de la cavité.
- 5 - Établir $\vec{E}_n(x, t)$ du champ électrique dans la cavité à la fréquence f_n en fonction de $\vec{E}_1$, n , x , t , L et de c .
- 6 - Quelle est la nature de l'onde à l'intérieur de la cavité ? Justifier votre réponse.
- 7 - Montrer qu'il existe des abscisses x_p où ce champ électrique est constamment nul. Donner la distance entre deux valeurs consécutives de x_p .
- 8 - En déduire le champ magnétique $\vec{B}_n(x, t)$ associé à cette onde. Expliciter les abscisses x'_p des points où le champ magnétique est constamment nul.

On revient dans toute la suite du problème à l'étude de la cavité réelle.

La cavité est éclairée, sur l'ensemble de la surface utile S , par un faisceau d'intensité constante que l'on assimilera à une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ . Ce faisceau est issu d'une source de grande cohérence temporelle, telle qu'un laser à colorant ou une diode laser. L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde plane incidente polarisée suivant $\vec{e}_z$ s'écrit pour $x \leq 0$: $\vec{E}_z(x, t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$, en notant le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$. La réflexion sur un miroir entraîne un déphasage de π et une diminution de l'amplitude, d'où

$$\vec{E}_{\text{réfléchi}}(0, t) = -\sqrt{R}\vec{E}_{\text{incident}}(0, t) \text{ et } \vec{E}_{\text{réfléchi}}(L, t) = -\sqrt{R}\vec{E}_{\text{incident}}(L, t).$$

Par ailleurs, en notant $\sqrt{T}$ le coefficient de transmission en amplitude d'un miroir et on a rappelé que l'on néglige le déphasage lié à la transmission.

B- Calcul du champ électromagnétique intra-cavité

9 - On considère tout d'abord l'onde électromagnétique qui a subi $2m$ réflexions dans la cavité. Préciser son sens de propagation et montrer que l'amplitude complexe du champ électrique de cette onde en un point M d'abscisse x ($0 < x < L$) s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}_{2m}(x, t) = \sqrt{TR}^m E_0 e^{-j2mkL} e^{j(\omega t - kx)}$$

10 - Préciser de même le sens de propagation de l'onde ayant subi $2m+1$ réflexions. Montrer que l'amplitude complexe du champ électrique de cette onde en un point M d'abscisse x ($0 < x < L$) s'écrit sous la forme

$$\underline{E}_{2m+1}(x, t) = -\sqrt{T}\sqrt{R}R^m E_0 e^{-j(2m+1)kL} e^{j(\omega t + k(x-L))}$$

11 - Montrer que l'onde résultante en un point quelconque de la cavité est la superposition de deux ondes planes progressives se propageant en sens inverse. On note $\underline{E}_{(+)}(x, t)$ et $\underline{E}_{(-)}(x, t)$ les amplitudes complexes des champs électriques des ondes résultantes se propageant respectivement selon les x croissants et les x décroissants. Déterminer $\underline{E}_{(+)}(x, t)$ et $\underline{E}_{(-)}(x, t)$. Comparer leur amplitude complexe on $x = L$ et commenter le résultat.

12 - Mettre l'amplitude du champ électrique sous forme

$$\underline{E}_z = E_0 e^{j\omega t} \underline{H}(k, x, L) \text{ avec } \underline{H} = \sqrt{T} \frac{e^{-jkx} - \sqrt{R}e^{jk(x-2L)}}{1 - Re^{-j2kL}}$$

13 - Calculer le champ magnétique en un point quelconque de la cavité.

14 - En exploitant la question 11, donner l'expression de l'onde transmise en $x = L$ en direction du détecteur.

C- Répartition de l'énergie à fréquence fixée

15 - Donner la définition de la densité volumique d'énergie électrique w_e . Calculer, en un point M d'abscisse x , sa moyenne temporelle $\langle w_e(x) \rangle$.

On rappelle que la valeur moyenne d'un produit de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence s'exprime aisément en notation complexe par :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{f} \cdot \underline{g}^*)$$

16 - La longueur L de la cavité est supposée supérieure à λ . Pour quelles valeurs de x , notées $x_{\max}$ (respectivement $x_{\min}$), $\langle w_e(x) \rangle$ est-elle maximale (respectivement minimale)? Donner la distance entre deux valeurs consécutives de $x_{\max}$. Comparer au résultat obtenu à la question 7.

17 - Procéder de la même façon pour la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie magnétique $\langle w_m(x) \rangle$.

- 2 - Déterminer l'équation de propagation relative au champ $\vec{E}(x, t)$ à l'intérieur de la cavité. Dédurre une relation entre k et ω .
- 3 - Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence d'un métal parfait en $x = 0$ et en $x = L$?
- 4 - En déduire E_2 en fonction de E_1 et la suite f_n des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité. On exprimera f_n en fonction de l'entier naturel n non nul et d'une fréquence particulière f_1 dépendant de L et de c . Ces fréquences propres correspondent aux modes propres de la cavité.
- 5 - Établir $\vec{E}_n(x, t)$ du champ électrique dans la cavité à la fréquence f_n en fonction de E_1 , n , x , t , L et de c .
- 6 - Quelle est la nature de l'onde à l'intérieur de la cavité ? Justifier votre réponse.
- 7 - Montrer qu'il existe des abscisses x_p où ce champ électrique est constamment nul. Donner la distance entre deux valeurs consécutives de x_p .
- 8 - En déduire le champ magnétique $\vec{B}_n(x, t)$ associé à cette onde. Expliciter les abscisses x'_p des points où le champ magnétique est constamment nul.

On revient dans toute la suite du problème à l'étude de la cavité réelle.

La cavité est éclairée, sur l'ensemble de la surface utile S , par un faisceau d'intensité constante que l'on assimilera à une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ . Ce faisceau est issu d'une source de grande cohérence temporelle, telle qu'un laser à colorant ou une diode laser. L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde plane incidente polarisée suivant $\vec{e}_z$ s'écrit pour $x \leq 0$: $\underline{E}_z(x, t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$, en notant le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$. La réflexion sur un miroir entraîne un déphasage de π et une diminution de l'amplitude, d'où

$$\vec{E}_{\text{réfléchi}}(0, t) = -\sqrt{R}\vec{E}_{\text{incident}}(0, t) \text{ et } \vec{E}_{\text{réfléchi}}(L, t) = -\sqrt{R}\vec{E}_{\text{incident}}(L, t).$$

Par ailleurs, en notant $\sqrt{T}$ le coefficient de transmission en amplitude d'un miroir et on rappelle que l'on néglige le déphasage lié à la transmission.

B- Calcul du champ électromagnétique intra-cavité

- 9 - On considère tout d'abord l'onde électromagnétique qui a subi $2m$ réflexions dans la cavité. Préciser son sens de propagation et montrer que l'amplitude complexe du champ électrique de cette onde en un point M d'abscisse x ($0 < x < L$) s'écrit sous la forme :

$$E_{2m}(x, t) = \sqrt{T} R^m E_0 e^{-j2mkL} e^{j(\omega t - kx)}$$

c - F est souvent appelée « finesse » de la cavité. Justifier cette dénomination.

25 - Au voisinage d'un pic de résonance, une cavité électromagnétique présente de très fortes analogies avec un circuit r/C série alimentée par une source de tension idéale de fréquence réglable et de force électromotrice $e(t) = e_0 \cos(\Omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé et on note:

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad Q = \frac{l\Omega_0}{r}$$

a - Exprimer en notation complexe l'intensité du courant circulant dans le circuit.

b - En déduire la moyenne temporelle de l'énergie stockée dans la bobine et dans le condensateur.

c - Montrer que si $Q \gg 1$ et si l'on se restreint à des fréquences voisines de la fréquence de résonance, la moyenne temporelle de l'énergie électrique $\langle U_{\text{circuit}} \rangle$ présente la même forme que $\langle U_{\text{em}} \rangle$.

d - Quelle grandeur caractéristique de la cavité est l'analogue du facteur de qualité Q du circuit r/C ?

26 - On remarque qu'il y a deux manières de placer la cavité électromagnétique en configuration résonante : soit on modifie L à la fréquence fixe, soit on modifie la fréquence, via une source laser accordable, à la longueur L donnée.

a - Le laser ayant une longueur d'onde λ fixe, quelles valeurs L_n faut-il donner à L pour placer la cavité en configuration résonante, c'est-à-dire pour avoir $\langle U_{\text{em}} \rangle \geq U_{\text{max}} / 2$?

b - On cherche à estimer la tolérance ΔL sur la distance L , qui permet de conserver la cavité en configuration quasi-résonante. L étant voisine d'une valeur L_n , on pose $\Delta L = L - L_n$ et on suppose $|\Delta L| \ll \lambda$. Déduire de la condition de résonance une relation simple entre ΔL , λ , et F . En déduire l'ordre de grandeur de la précision du réglage de L si on éclaire dans le visible.