

PREMIER DEVOIR DE CONTROLE

Section : MP 2

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Durée : 2 heures

L'épreuve comporte deux pages. Le sujet est composé de deux exercices tous indépendants.

Exercice 1 (10 points)

Soient n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $0_{p,q}$ la matrice nulle à p lignes et à q colonnes. Une matrice carrée est dite à diagonale nulle si tous ses coefficients diagonaux sont nuls.

On veut établir l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

- (i) A est semblable à une matrice à diagonale nulle.
- (ii) A est de trace nulle.

1. Montrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si la famille (x, y) est liée, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha.x$.

3. Soient u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

(a) Vérifier qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(e_k) = \lambda_k.e_k \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad u\left(\sum_{k=1}^n e_k\right) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n e_k$$

(b) En déduire que $u = \lambda.Id_{\mathbb{R}^n}$.

4. Ici $n \geq 2$. On suppose que la matrice A est non nulle et que $Tr(A) = 0$. soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

(a) Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(a, f(a))$ est libre.

(b) Montrer alors que A est semblable à une matrice $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & A_1 \end{array} \right)$ où $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$,

$L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Que vaut $Tr(A_1)$?

(c) Soit $Q_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par blocs $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & Q_1 \end{array} \right)$ est inversible et déterminer son inverse.

(d) En déduire que si A_1 est semblable à une matrice à diagonale nulle, alors A est semblable à une matrice à diagonale nulle.

5. Démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). (On pourra raisonner par récurrence sur $n \geq 1$).

Exercice 2 (10 points)

Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. De plus, si H est un hyperplan de E et $a \in E \setminus H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Enfin, on rappelle que les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles sur E .

Soient H un hyperplan de E et u un automorphisme de E vérifiant :

$$u \neq Id_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x \in H, u(x) = x.$$

1. (a) Montrer que 1 est une valeur propre de u d'ordre de multiplicité $\geq n - 1$.
(b) Justifier que $E_1(u) = H$ (où $E_1(u)$ désigne le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1).
(c) Montrer que le polynôme caractéristique de u vaut $(X - 1)^{n-1}(X - \det u)$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) u est diagonalisable.
 - (ii) $\det u \neq 1$.
 - (iii) $\text{Im}(u - Id_E)$ n'est pas inclus dans H .

(iv) Il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et il existe une base $\mathcal{B}$ de E tels que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Dans ce cas, on dit que u est une dilatation d'hyperplan H , de droite $\text{Im}(u - Id_E)$ et de rapport λ .

3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u n'est pas diagonalisable.
- (ii) $\det u = 1$.
- (iii) $\text{Im}(u - Id_E)$ est inclus dans H .

(iv) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans ce cas, on dit que u est une transvection d'hyperplan H et de droite $\text{Im}(u - Id_E)$.

4. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E vérifiant $\ker \varphi = H$. Pour tout h vecteur non nul de H , on définit un endomorphisme $\Psi_{h,\varphi}$ de E par

$$\Psi_{h,\varphi}(x) = x + \varphi(x).h, \quad \text{pour tout } x \in E$$

Soit a un vecteur non nul de H .

- (a) Calculer $\Psi_{a,\varphi} \circ \Psi_{-a,\varphi}$. En déduire que $\Psi_{a,\varphi}$ est bijectif et déterminer sa réciproque.
- (b) Montrer que $\Psi_{a,\varphi}$ est une transvection que l'on caractérisera.