

Examen d'Algèbre N°1

Section : MP 2

Durée : 2h

Date : Décembre 2021

Nbre de pages : 3

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision es raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème :

Soit n un entier naturel ≥ 2 . On note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$.

On se propose d'étudier les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$(\mathcal{P})$: Les valeurs propres complexes de A sont exactement les éléments de $\mathcal{U}_n$.

Partie I : Résultats préliminaires

1. Dans cette question, on s'intéresse au cas $n = 2$:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Vérifier que $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$.

(b) Montrer que A vérifie la propriété $(\mathcal{P})$, si et seulement si, $d = -a$ et $a^2 + bc = 1$.

(c) Montrer que tout sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ formé par des matrices vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ est abélien.

2. Dans cette question, on prend A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

On écrit $P = P_1 + iP_2$ avec P_1 et P_2 deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que

$$AP_1 = P_1B \text{ et } AP_2 = P_2B.$$

(b) Vérifier que, pour tout réel x ,

$$A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B.$$

(c) On pose, pour tout nombre complexe z , $Q(z) = \det(P_1 + zP_2)$. On admet que Q est un polynôme en la variable z .

i. Vérifier que $Q(i) \neq 0$.

ii. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 + \lambda P_2 \in GL_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer qu'il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = RBR^{-1}$.

Partie II : Etude du cas général $n \geq 3$

Tout au long de cette partie, n désigne un entier naturel ≥ 3 . Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\lambda_k = \omega^k$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (P).

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A . Prouver que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, donner la dimension de $E_{\lambda_k}(A)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k .
3. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$ et calculer $\det(A)$ selon la parité de n .
4. Justifier que $A^n = I_n$.
5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I} = \{k \in \{1, \dots, n\}, \text{ tel que } \lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ est non vide.
6. Dans cette question, on choisit $k \in \mathcal{I}$, donc $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On désigne par U_k un vecteur propre (complexe) associé à la valeur propre λ_k . On écrit $U_k = V_k + iW_k$, où V_k et W_k sont des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose de plus $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$.
 - (a) Montrer que $\bar{U}_k = V_k - iW_k$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_k$ de A .
 - (b) Montrer que $\ker(A^2 - 2\cos(\theta_k)A + I_n) = E_{\lambda_k}(A) \oplus E_{\bar{\lambda}_k}(A)$.
 - (c) Montrer que (V_k, W_k) est une base de $\ker(A^2 - 2\cos(\theta_k)A + I_n)$.
 - (d) Calculer AV_k et AW_k en fonction de V_k , W_k et θ_k .
7. On suppose dans cette question que $n = 2p + 1$, avec p est un entier naturel.
 - (a) Montrer que $E_1(A)$ et $\bigoplus_{1 \leq k \leq p} \ker(A^2 - 2\cos(\theta_k)A + I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - (b) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on note

$$R_{\theta_k} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & R_{\theta_1} & & & \\ & & R_{\theta_2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_p} \end{pmatrix}.$$

8. On suppose dans cette question que $n = 2p + 2$, avec p est un entier naturel. Démontrer que A est semblable à une matrice B diagonale par blocs que l'on précisera.
9. On se propose de retrouver les résultats des questions 7.b et 8. par une autre manière.
 - (a) Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **diagonalisables**.
Montrer que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si et seulement si, M et N ont le même polynôme caractéristique.
 - (b) Démontrer que A est semblable à B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (Utiliser 2.d de la partie I).

Partie III : Une application sur les matrices circulantes

On fixe n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de J .
2. En déduire que J est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice B définie en 7.b et 8.
3. En calculant J^n , justifier que J est inversible.
4. On pose $G = \{J^k; k \in \mathbb{Z}\}$.
 - (a) Soit $k \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $J^k = I_n$, si et seulement si, n divise k .
 - (b) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
 - (c) Soit $k \in \mathbb{Z}$.
 - i. Montrer que l'ordre de J^k est $\frac{n}{\text{pgcd}(n, k)}$.
 - ii. En déduire que J^k est un générateur de G , si et seulement si k et n sont premiers entre eux.
5. Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $J^k e_1 = e_{n-k+1}$.
6. Soit $p \in \{2, \dots, n\}$.
Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$J^k e_p = \begin{cases} e_{p-k} & , \text{si } k < p \\ e_{n-k+p} & , \text{si } k \geq p \end{cases}.$$

7. Pour $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des réels, on définit

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

appelée **matrice circulante**. On pose $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$.

- (a) Etablir que $C = P(J)$.
- (b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $R_\theta^j = R_{j\theta}$.
- (c) Expliciter une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale par blocs semblable à C .
8. On note $\mathbb{R}[J] = \{Q(J); Q \in \mathbb{R}[X]\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que la famille $(I_n, J, \dots, J^{n-1})$ est libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Déterminer la dimension et une base de $\mathbb{R}[J]$.
 - (c) Vérifier que $\mathbb{R}[J]$ est l'ensemble des matrices circulantes.
 - (d) En déduire que le produit de deux matrices circulantes est une matrice circulante.