

Devoir de Contrôle N°1.

Durée: 2 heures

Epreuve: Analyse

Problème :

Partie I :

On considère la suite $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $v_n = \ln(u_n)$.

- Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_{n+1} - v_n$.
 - Déduire l'existence d'un réel strictement positif K tel que $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} Kn^n e^{-n} \sqrt{n}$.
- Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \ln(k+1)$.
 - Déduire que $\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln(n)$.
- On pose $w_n = \ln(n!) - n \ln(n)$.
 - Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} w_{n+1} - w_n$.
 - Déduire que $\ln(n!) = n \ln(n) - n + o(n)$.
- On pose $a_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \ln(\sqrt{n})$.
 - Montrer que $(a_n)_n$ converge.
 - Retrouver le résultat de la question 1.(b) (on ne demande pas de calculer K).
- On donne la formule de Wallis $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Montrer que $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.
- Déterminer un équivalent simple à $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
 - Montrer que $\ln(n!) = n \ln(n) - n + \ln(\sqrt{n}) + \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - En déduire l'écriture asymptotique suivante : $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Partie II : Chacune des questions (1) et (2) de cette partie est une application des résultats obtenus dans la partie I.

- Pour $a \in \mathbb{C}$, étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$.
- Vérifier que $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n!}$.
 - Déduire que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n!}$.

(c) Montrer alors que $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)^{1/n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

(d) Dédurre encore de la question II)2)b) que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^k}{k^{k+\frac{1}{2}}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$.

(e) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n \geq 1} r_n$ où $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^k}{k^{k+\frac{1}{2}}}$.

Exercice :

Les questions I) et II) sont indépendantes.

I) Soit $E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est de classe } C^1 \text{ telle que } f(0) = 0\}$.

Pour $f \in E$ on pose $N_1(f) = \int_0^1 |f'(x)| dx$ et $N_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 dans (E, N_1) .

3. Montrer que la suite $(f_n)_n$ n'admet pas de valeur d'adhérence pour la norme N_2 .

4. Dédurre que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

II) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie A est dite convexe si pour tout $x, y \in A$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$.

Une partie A est dite symétrique par rapport à 0 si : $\forall x \in A, -x \in A$.

Soit C une partie de E fermée, convexe, bornée, symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non vide. On se propose de montrer qu'il existe une norme sur E pour laquelle C est la boule unité fermée.

1. Justifier qu'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset C$.

2. Montrer que $B(-a, r) \subset C$ et déduire que $0 \in \overset{\circ}{C}$.

3. Pour $x \in E$, on pose $A(x) = \{t \in \mathbb{R}_+^*; \frac{x}{t} \in C\}$.

(a) Justifier que l'ensemble des réels $A(x)$ admet une borne inférieure qu'on notera $N(x)$.

(b) Déterminer $N(0)$.

(c) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, utiliser que C est bornée pour montrer que $N(x) > 0$.

(d) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, en exploitant que C est fermée montrer que $N(x) = \min A(x)$.

(e) Montrer que $N(x) = N(-x)$ et pour $\lambda > 0$ montrer que $N(\lambda x) = \lambda N(x)$.

(f) Pour $x, y \in E \setminus \{0\}$, exploiter la convexité de C appliquée aux vecteurs $\frac{x}{N(x)}$ et $\frac{y}{N(y)}$ pour montrer que $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

(g) Dédurre de ce qui précède que N définit une norme sur E .

4. Soit $x \in E$.

(a) Justifier que si $N(x) = 1$ alors $x \in C$.

(b) Montrer à l'aide de la convexité de C que si $N(x) < 1$ alors $x \in C$.

5. Dédurre finalement que C est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans (E, N) .