

Exercice : Induction électromagnétique

On s'intéresse dans cet exercice à un modèle très simplifié de haut-parleur, dans une configuration proche des rails de Laplace où la membrane du haut-parleur est fixée solidairement à la tige mobile, qui est également reliée élastiquement à un bâti. La tige mobile a pour longueur $AA' = a$, et sa position est repérée par son abscisse x , dont l'origine correspond à la position de repos. Les frottements de l'air sur la membrane se traduisent par une force de frottement linéaire $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Le système est forcé électriquement par la tension u_0 . On note R la résistance électrique de l'ensemble, et on néglige l'auto-induction (figure 1).

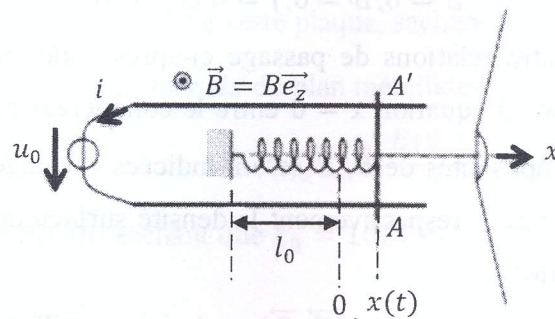


Figure 1

1. Exprimer en fonction de $\dot{x}$ la f.é.m. induite.
2. Ecrire les équations électrique et mécanique.
3. Découpler ces équations pour aboutir à une équation différentielle portant sur la position x de la tige mobile. Quel type d'équation obtient-on. L'analyser physiquement : comment se traduisent les phénomènes d'induction. Commenter leur signe.
4. Procéder à un bilan de puissance du système et interpréter physiquement chaque terme.

Données Utiles : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} F.m^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$, $c = 3.10^8 m.s^{-1}$

Problème I : Onde entre deux plans parfaitement conducteurs

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $Oxyz$, on définit la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On dispose de deux plans métalliques parallèles au plan yOz et d'équation $x = 0$ et $x = a$. Dans l'espace vide entre ces plans conducteurs, on étudie la propagation d'une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω et polarisée rectilignement suivant Oy . Suivant le sens de propagation de l'onde, les deux plans métalliques joueront le rôle de résonateur électromagnétique (figure 2).

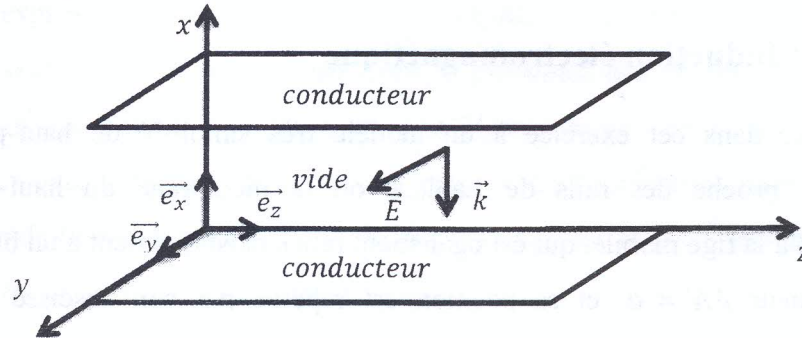


Figure 2

1. Montrer que dans un conducteur parfait, en l'absence de champ statique, nous avons :

$$\vec{E} = \vec{0}, \vec{B} = \vec{0}, j = 0 \text{ et } \rho = 0$$

2. Compléter les quatre relations de passage ci-après concernant les champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ au niveau de la surface d'équation $x = 0$ entre le conducteur parfait (milieu1) et le vide (milieu2). Les composantes de $\vec{E}$, $\vec{B}$ seront indicées T (tangentiels) et N (normales) et nous poserons σ et j_s respectivement la densité surfacique de charges et le vecteur surfacique de courant.

L'onde électromagnétique incidente $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$, polarisée rectilignement et parallèlement à Oy , se propage vers le métal dans le sens du vecteur d'onde $\vec{k} = -k\vec{e}_x$. En notation complexe, le champ électrique incidente est donné par :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

3. Déterminer, à l'aide de l'équation de structure d'une onde plane, le champ magnétique incident $\vec{B}_i$.
4. En utilisant les relations de passage des composantes du champ électrique, déterminer le champ $\vec{E}_r(0, t)$ de l'onde réfléchie sur le plan conducteur d'équation $x = 0$ et en déduire les champs électriques $\vec{E}_r$ et magnétique $\vec{B}_r$ de l'onde réfléchie en tout point de l'espace.

5. Exprimer le champ électrique total $\vec{E}_T(x, t)$ et magnétique totale $\vec{B}_T(x, t)$ à l'instant t en un point $M(x, y, z)$ de la cavité. En déduire le rapport des modules des champs complexes $\frac{\|\vec{E}_T\|}{\|\vec{B}_T\|}$ en fonction de c, k et x .
6. Montrer que la fréquence de l'onde dans cette cavité ne peut prendre que des valeurs discrètes f_n exprimées en fonction de l'entier N .
7. Calculer la fréquence propre minimale de ce résonateur pour une distance $a = 3\text{cm}$ entre les plans métalliques.

Les résultats des quatre questions suivantes seront exprimés en fonction de ϵ_0, c, E_0, a et pour $N = 1$.

8. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}(x, t)$ de l'onde résultante et en déduire sa moyenne temporelle $\langle \vec{R}(x, t) \rangle$. Commenter le résultat.
9. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique $u(x, t)$ puis sa moyenne temporelle $\langle u(x, t) \rangle$ en fonction de ϵ_0 et E_0 .
10. Déterminer le vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_s(t)$ qui parcourt à l'instant t la plaque métallique, à l'interface métal-vide, en $x = 0$.
11. En déduire, en fonction de ϵ_0 et E_0 , la pression électromagnétique moyenne temporelle $\langle p \rangle = \langle \frac{dF}{ds} \rangle$ exercée par l'onde sur cette plaque, sachant que dF est la force de Laplace exercée sur l'élément de surface ds du plan métallique d'équation $x = 0$.

$$dF = j_s(t) ds \frac{B(0, t)}{2}$$

12. Calculer $\langle u(x, t) \rangle$ et $\langle p \rangle$ sachant que $E_0 = 100\text{Vm}^{-1}$.

Problème II : Grandes ondes et Plasma

Partie. I- Préliminaires

Les grandes ondes sont des ondes électromagnétiques radio en mode AM. La fréquence de ces ondes varie de 150kHz à 300kHz . Par exemple, la station radio *Europe1* émet des ondes dont la fréquence caractéristique vaut 185kHz . Elles sont émises par quatre masts haubanés qui émettent au total une puissance moyenne $P = 2000\text{kW}$. Dans toute la suite, on supposera que ces antennes rayonnent une onde électromagnétique plane et monochromatique de

fréquence $f = 185\text{kHz}$. On supposera, dans cette partie, que l'onde se propage dans l'air que l'on assimilera au vide.

1. Calculer la longueur d'onde associée à ce rayonnement électromagnétique.

On suppose que le champ électrique est polarisé suivant Oy , et que l'onde se propage suivant les z croissants. En appelant E_0 l'amplitude du champ électrique en O , donner une expression possible du champ électrique complexe $\vec{E}$

2. Déterminer l'expression de k en fonction de ω et c .
3. Donner le champ magnétique associé à cette onde.
4. Donner l'expression du vecteur Poynting et calculer sa valeur moyenne temporelle.
5. En supposant schématiquement que toute la puissance des antennes se retrouve sur une surface plane notée $S = 100\text{km}^2$, établir l'expression de E_0 en fonction de la puissance moyenne temporelle du rayonnement. Faire l'application numérique.
6. Le modèle de l'onde plane est-il tout de même correct à l'échelle des récepteurs radios couramment utilisés. Justifier votre réponse.

Partie II- Propagation dans l'atmosphère

L'onde émise par l'antenne se propage dans l'atmosphère terrestre que l'on modélise schématiquement en deux couches (figure 3).

Une première couche assimilable au vide partant du sol jusqu'à une altitude de $h = 100\text{km}$ environ puis une deuxième couche appelée ionosphère, épaisse d'environ 200km .

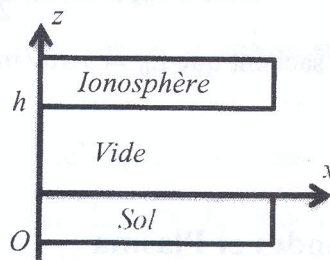


Figure 3

Réflexion ionosphérique des grandes ondes

On désire étudier le comportement des grandes ondes lors de leur propagation entre l'ionosphère et le sol terrestre. On suppose dans cette partie que l'ionosphère a le même comportement qu'un miroir métallique parfait : l'onde émise au sol et se propageant dans le vide est parfaitement réfléchi par l'ionosphère.

On considère une onde plane, monochromatique, de pulsation ω qui se propage dans la partie vide de l'atmosphère. On suppose comme indiqué sur la figure 4, que l'onde émise par l'antenne peut se mettre sous la forme suivante, avant sa réflexion sur l'ionosphère :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_y$$

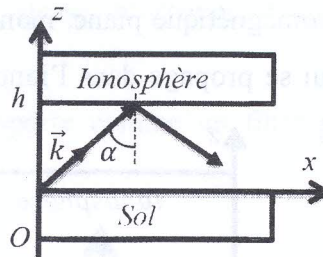


Figure 4

7. Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de ω , c et α dans le repère $Oxyz$.
8. Donner l'expression du champ magnétique associé au champ électrique.

On cherche à déterminer les caractéristiques de l'onde après réflexion sur l'ionosphère. On postule un champ réfléchi sous la forme :

$$\vec{E}_r = E_0' e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \vec{e}_y$$

9. Pourquoi la pulsation de l'onde réfléchie est-elle inchangée.
10. Pourquoi la polarisation de l'onde réfléchie est-elle inchangée.
11. Sachant que la propagation s'effectue dans le vide, montrer la relation : $\|\vec{k}\| = \|\vec{k}'\|$
12. Déterminer $\vec{k}'$ et retrouver la loi de Descartes pour la réflexion.
13. On admet que les conditions de passage du champ électrique, données par les équations de Maxwell, restent valables, et que le champ électromagnétique est nul dans l'ionosphère montrer que :

$$E_0' = -E_0 \exp\left(-2i \frac{\omega}{c} \cos(\alpha) h\right)$$

14. Donner l'expression finale du champ électrique réfléchi.
15. Donner aussi l'expression du champ magnétique associé.
16. Donner l'expression du champ électrique résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Commenter.
17. Conclure sur la possibilité de recevoir les grandes ondes pour des récepteurs situés à plusieurs centaines de kilomètres de l'antenne émettrice. On s'aidera d'un schéma.

Détermination des conditions de réflexion de l'onde par l'ionosphère.

On revient dans cette partie sur la compréhension des phénomènes permettant d'expliquer la réflexion ionosphérique de l'onde. Pour cela, on désire étudier le comportement de

l'ionosphère pour les grandes ondes. Ainsi, on la modélise comme un plasma : c'est un milieu électriquement neutre, qui compte par unité de volume n électrons libres, de masse m et de charge $-e$, et n ions de charge e et de masse M . On supposera les ions immobiles car $M \gg m$ et les électrons comme non relativistes.

On considère une onde électromagnétique plane, monochromatique de pulsation ω , polarisée rectilignement suivant Oy qui se propage dans l'ionosphère suivant la direction Oz dans le sens des z croissant (figure 5)

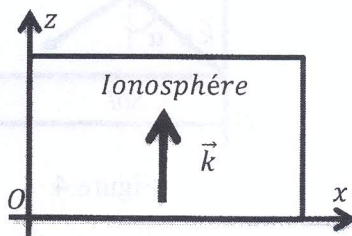


figure 5

On donne : $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$

18. Donner l'expression complexe du champ magnétique $\vec{B}$ dans l'ionosphère.
19. Appliquer le principe fondamentale de la dynamique à un électron, on notera $\vec{v}_e$ sa vitesse.
20. En comparant les normes des forces magnétiques et électriques, montrer que l'influence du champ magnétique est négligeable devant celle du champ électrique.
21. Calculer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.
22. Montrer que la conductivité électrique s'écrit sous la forme :
$$\underline{\gamma} = \frac{ne^2}{im\omega}$$
23. Calculer la puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique au plasma. Commenter.
24. Montrer que la relation de dispersion liant le vecteur d'onde et la pulsation ω s'écrit sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

25. Identifier ω_p^2 .
26. Que se passe-t-il si $\omega < \omega_p$. Ecrire l'expression du champ électrique $\vec{E}$. Conclure.
27. Que se passe-t-il si $\omega > \omega_p$. Ecrire l'expression du champ électrique $\vec{E}$. Donner la représentation graphique du module du vecteur d'onde k en fonction de la pulsation ω .

28. Donner les expressions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.
29. Tracer schématiquement sur le même graphe ces deux vitesses en fonction de la pulsation ω .
30. Commenter le fait que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière c .
31. Que signifie physiquement la vitesse de groupe. Pourquoi est-elle nécessairement inférieur à c .
32. Montrer que le plasma se comporte comme un filtre passe haut. Préciser alors la pulsation de coupure du filtre.

Confrontation du modèle aux grandes ondes d'Europe 1

33. Sachant que $n = 10^{11} m^{-3}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ et $m = 9.1 \times 10^{-31} kg$. Calculer la fréquence de plasma f_p .
34. En comparant la fréquence des grandes ondes d'Europe 1 et la fréquence de plasma, montrer que les grandes ondes ne peuvent pas se propager dans l'ionosphère.
35. Que se passe-t-il alors pour une onde incidente, du type de celle d'Europe 1, issue de l'antenne précédente, lorsqu'elle arrive en incidence quelconque sur l'ionosphère.
36. A votre avis, quels sont les avantages et les inconvénients des grandes ondes comparées, par exemple, aux ondes FM.