

DEUXIEME DEVOIR DE CONTROLE

Section : MP 2

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Durée : 2 heures

L'épreuve comporte trois pages. Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème tous indépendants.

Exercice (5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique noté $\langle . | . \rangle$ et de la norme euclidienne $\|.\|$ associée. Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

$$\langle X | Y \rangle = {}^tXY \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = {}^tXX$$

où tX désigne la transposée de X .

1. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Etablir les égalités :

$$\langle AX | Y \rangle = \langle X | {}^tAY \rangle \quad \text{et} \quad \|\Omega X\| = \|X\|$$

2. Montrer que pour toute matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle DY | Y \rangle \leq \alpha \|Y\|^2$$

où α est le maximum des coefficients diagonaux de D .

3. Montrer que pour toute matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

$$\frac{\langle SX | X \rangle}{\|X\|^2} \leq \alpha$$

où α est le maximum des valeurs propres de S .

4. En utilisant une décomposition du vecteur X sur une base orthonormée de vecteurs propres de S , montrer que cette dernière inégalité est une égalité si et seulement si X est vecteur propre de S associé à la valeur propre α

Problème (15 points)

Dans tout ce problème, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On note $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y , et $\|x\|$ la norme issue de ce produit scalaire.

- L'orthogonal d'un sous-espace F de E est noté $F^\perp$ et défini par :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x | y \rangle = 0\}$$

- Si deux sous-espaces F et G de E vérifient : $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x | y \rangle = 0$, on dit que F et G sont orthogonaux et on écrit $F \perp G$.
- On appelle symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F de E la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.
- On appelle réflexion sur E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de E . Une telle réflexion est dite la réflexion d'hyperplan H .

Partie I (8 points)

1. Montrer qu'une réflexion sur E d'hyperplan H est diagonalisable. Déterminer ses sous-espaces propres et calculer son déterminant.
2. Soient F et G deux sous-espaces de E .

- (a) Justifier que $F \subset (F^\perp)^\perp$ puis déduire que $F = (F^\perp)^\perp$.
- (b) Etablir les équivalences : $F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$.
- (c) En déduire que si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$, alors $G = F^\perp$.
- (d) Etablir les équivalences : $F^\perp \perp G^\perp \iff F^\perp \subset G \iff G^\perp \subset F$.

Définition : On dit que deux sous-espaces de E sont perpendiculaires si l'un contient l'orthogonal de l'autre.

3. **Exemple:** Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les sous-espaces suivants :

$$D = Vect((1, 0, 0)) \quad , \quad \Delta = Vect((0, 1, 0)) \quad , \quad P = D^\perp \quad \text{et} \quad Q = \Delta^\perp$$

En justifiant votre réponse,

- (a) Les droites D et Δ sont-elles orthogonales ? Sont-elles perpendiculaires ?
 - (b) Les plans P et Q sont-ils orthogonaux ? Sont-ils perpendiculaires ?
4. Soient k hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_k$ deux à deux perpendiculaires et $u_1, u_2, \dots, u_k$ des vecteurs non nuls tels que, pour tout i , u_i est orthogonal à H_i . Montrer que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est orthogonale. En déduire que $k \leq n$.
 5. Démontrer qu'une symétrie vectorielle de E est une symétrie orthogonale si, et seulement si, elle est une isométrie de E .

6. Soient s_1 (resp s_2) une réflexion sur E d'hyperplan H_1 (resp H_2), v_1 (resp v_2) un vecteur unitaire de $H_1^\perp$ (resp $H_2^\perp$) et p_1 (resp p_2) la projection orthogonale sur la droite $H_1^\perp$ (resp $H_2^\perp$).
- (a) Vérifier que s_1 et s_2 commutent si, et seulement si, p_1 et p_2 commutent.
 - (b) Exprimer, pour tout $x \in E$ et $k \in \{1, 2\}$, $p_k(x)$ en fonction de x et v_k .
 - (c) Dédire que s_1 et s_2 commutent si, et seulement si, $s_1 = s_2$ ou H_1 et H_2 sont perpendiculaires.

Partie II (7 points)

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $\dim E = 2$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E et u une isométrie de E .

- (a) Montrer qu'il existe un réel θ vérifiant $u(e_1) = \cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2$.
- (b) Dire pourquoi $u(e_2)$ est colinéaire au vecteur $-\sin \theta \cdot e_1 + \cos \theta \cdot e_2$.
- (c) En déduire que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est égale à :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

- (d) Démontrer que u est une réflexion si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S_\theta$.
- (e) Déterminer, pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, la matrice $S_{\theta_1} \times S_{\theta_2}$. En déduire que toute isométrie de E est la composée d'au plus deux réflexions.

2. On revient au cas général $\dim E = n \geq 2$. Soient a et b deux vecteurs distincts de E tels que $\|a\| = \|b\|$.

- (a) Montrer que les vecteurs $a - b$ et $a + b$ sont orthogonaux.
- (b) Soit s la réflexion d'hyperplan $H = (\text{Vect}(a - b))^\perp$. Montrer que

$$s(a) = b \quad \text{et} \quad s(b) = a$$

(Indication : Exprimer $s(a - b)$ et $s(a + b)$ en fonction de a et b).

3. Soient u une isométrie de E et $a \in E$. Montrer que si $u(a) \neq a$, alors il existe une réflexion r sur E telle que $r \circ u(a) = a$.
4. Dans cette question, on suppose que $\dim E \geq 3$. Soient K un hyperplan de E et τ une réflexion sur l'espace K . Montrer qu'on peut prolonger τ en une réflexion σ sur E .
5. Conclure que toute isométrie u de E est la composée d'au plus n réflexions de E .
(Indication : on pourra raisonner par récurrence sur $\dim E = n \geq 2$, en étudiant à part le cas où $u = \text{Id}_E$).

Fin de l'énoncé.