

* * * * *

Institut Préparatoire aux Études
d'Ingénieurs de Sfax

Examen de Mathématiques II
Section : M.P.2

Durée : 3h

Date : 13 Mai 2022

Nbre de pages : 4

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice

Notations

- L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U, \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

- Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si

$$\forall x \in U, \Delta f(x) = 0$$

- L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(U)$.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.
2. On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à **variables séparables**, c'est à dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$.
On se donne donc deux fonctions u et v , de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, **non identiquement nulles**, et on pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est **harmonique** sur $\mathbb{R}^2$.

- (a) Justifier qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) \neq 0$.

- (b) On note $\lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$. Montrer que u et v sont solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

- (c) En discutant les trois cas $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$, donner la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

3. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

(a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(b) Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

(c) Exprimer également $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

(d) Montrer que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

(e) On dit que f est radiale si $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Problème

Notations

- On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si ${}^t A = A$ et qu'elle est dite *antisymétrique* si ${}^t A = -A$.

- Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A_s = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$ et $A_a = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$. Ainsi, A_s est une matrice symétrique, A_a est une matrice antisymétrique et $A = A_s + A_a$. On dit que A_s est la *partie symétrique* de A et que A_a est sa *partie antisymétrique*.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ le spectre réel de A , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A .

- Une matrice symétrique réelle est dite *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de sa norme euclidienne $\|X\| = \sqrt{{}^t X X}$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $q_A(X) = {}^t \bar{X} A X$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En particulier, on remarque que $q_A = q_{A_s} + q_{A_a}$ et $q_A(X) = \langle X, A X \rangle$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I- Résultats préliminaires

I.1) On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X A_s X > 0$.

I.2) On suppose que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de M . Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M respectivement associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Montrer que $\lambda_1 \cdot \|X\|^2 \leq q_M(X) \leq \lambda_n \cdot \|X\|^2$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I.3) On suppose dans cette question que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que $q_M(X) = 0$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que $\text{sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0\}$.
- (b) Soit λ une valeur propre **complexe** de M et V un vecteur propre complexe associé. En calculant $q_M(V)$ de deux manières différentes, prouver que $\lambda \in i \cdot \mathbb{R}$.
- (c) Montrer qu'il existe deux entiers naturels p et s , et qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ positifs tels que $\chi_M = X^p \prod_{1 \leq k \leq s} (X^2 + \alpha_k)$.
- (d) Montrer que $\det(I_n + M) = \det(I_n - M)$. En déduire que $\det(I_n + M) \geq 1$.

II- Valeurs propres de A_s

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.1) Pour toute valeur propre réelle λ de A , montrer que $\min \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leq \lambda \leq \max \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$. En déduire que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors A est inversible.

II.2) On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_s$.
- (b) Montrer qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = \det(A_s) \det(I_n + Q)$.
- (c) En déduire que $\det(A) \geq \det(A_s)$.

III- Matrices positivement stables

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positivement stable* si toutes ses valeurs propres complexes ont une partie réelle strictement positive.

III.A - Exemples

III.A.1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que A est positivement stable si et seulement si $\text{tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

(ind On notera $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ et on discutera si $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$ ou $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

III.A.2) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que A et ${}^t A$ sont positivement stables.

III.A.3) La somme de deux matrices positivement stables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle nécessairement positivement stable?

III.A.4) Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices positivement stables qui commutent.

On désigne par u_A l'endomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} u_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ V & \longmapsto & AV \end{array}$$

Soit λ une valeur propre complexe de $A + B$.

- (a) Montrer que $E_{\lambda}(A + B)$ est stable par u_A .
- (b) On note $\tilde{u}_A$ l'endomorphisme induit par u_A sur $E_{\lambda}(A + B)$. Soit α une valeur propre de $\tilde{u}_A$ et V un vecteur propre de $\tilde{u}_A$ associé à α .

En écrivant $BV = (A + B)V - AV$, déduire que V est un vecteur propre de B .

- (c) En déduire que $A + B$ est positivement stable.

III.A.5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A_s soit définie positive.

(a) Soit $X = Y + iZ$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, où Y et Z appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\overline{X} = Y - iZ$.

Montrer que, si $X \neq 0$, alors $\operatorname{Re}(q_A(X)) > 0$, où $\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.

(b) Montrer que A est positivement stable.

III.A.6) Donner un exemple de matrice A positivement stable telle que A_s n'est pas définie positive.

III.B -

Dans cette partie, on établit un résultat sur l'exponentielle de matrice.

On rappelle que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de M est définie par

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

La fonction $t \mapsto \exp(tM)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est donnée par

$$t \mapsto M \exp(tM) = \exp(tM)M.$$

De plus, $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$ pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

III.B.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Soit u une fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose que la fonction $v = u' + \lambda u$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(a) On considère l'équation différentielle $(L) : y' + \lambda y = v$.

Vérifier que toute solution réelle y de (L) sur $\mathbb{R}_+$ est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, y(x) = \alpha e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda t} v(t) dt$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Dédire que u est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

III.B.2) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure à coefficients complexes. On suppose que les coefficients diagonaux de T sont des nombres complexes de partie réelle strictement positive.

Soit $u_1, \dots, u_n$ des fonctions à valeurs complexes, définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et soit, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $U'(t) + TU(t) = 0$.

Montrer que les fonctions u_j , où $1 \leq j \leq n$, sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

III.B.3) Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{C})$.

Montrer, soigneusement, que $\exp(M) = P \exp(N) P^{-1}$.

III.B.4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positivement stable de valeurs propres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et soit α un réel tel que $0 < \alpha < \min_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_j)$.

Montrer que la fonction $t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.